

1. まえがき 近年、初期たわみや残留応力など、いわゆる初期不整を有する長方形の圧縮板および圧縮補剛板の幾何学的・材料的非線形解析が比較的多くなされるようになってきた。一方、曲線鋼箱桁橋のフランジ部のようにその面内に曲率を有する補剛板の弾性および弾塑性有限変位解析はほとんどなされていない。先に、筆者らは圧縮力¹⁾あるいは圧縮力と横荷重²⁾が作用する扇形補剛板の弾性有限変位挙動を差分法により明らかにし、長方形板と扇形板の変形や応力分布などの相違について調べた。ここではこれらの知見をもとに、材料の降伏と平面および板厚方向の塑性の拡がりを考慮して、円周方向に補剛され初期たわみを有する扇形板の圧縮耐力を弾塑性有限変位解析によって決定する。数値計算結果から、縦横比、曲率半径比、曲げおよび伸び刚度、初期たわみなどと扇形補剛板の圧縮耐力との関係を探るとともに、長方形圧縮補剛板との比較を行う。

2. 弾塑性有限変位解析理論 Fig. 1に示すように、初期たわみを有し、円周方向に補剛された板がその方向に圧縮力を受ける場合を考える。以下に示す仮定に基づき解析を行う。すなわち、

1) Kirchhoff-Love の仮定。2) 扇形補剛板をそれと等価な極限方形扇形板とみなす。3) 残留応力は今回の計算では考慮しない。

4) 一方向に補剛され、かつその方向に圧縮力が作用することを勘案して、材料は半径、円周方向の直応力 σ_r, σ_θ およびせん断応力 $\tau_{r\theta}$ がそれぞれ単独に降伏した場合に塑性化が生ずるとする近似降伏条件式に従うものとする。

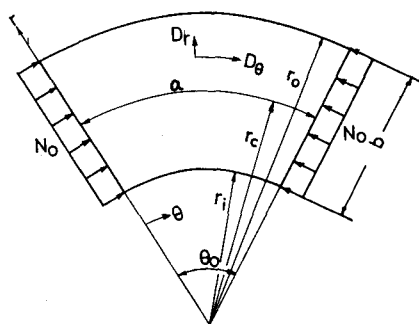


Fig. 1 圧縮力を受ける扇形補剛板

(1) 基礎微分方程式 従来から圧縮板の弾塑性有限変位解析では、部材の時刻々の塑性化をより精密に取扱うため増分形式のつり合い式が一般によく用いられている。この方法は扇形板の解析にも適用可能であるが、弾性時のつり合い式でさえ複雑な上に、これを反復すると極めて煩雑になる。1968年 T. H. Lin⁴⁾ は弾性状態のつり合い式に材料の塑性化の影響を加味し、弾性と仮定して求めた断面力から塑性化により生じた超過断面力を差引くという巧妙な一解析法を提案した。これによれば、扇形板の断面力が次のように定義される。

$$N_r = N_r^e - N_r^p, \quad N_\theta = N_\theta^e - N_\theta^p, \quad N_{r\theta} = N_{r\theta}^e - N_{r\theta}^p \quad \dots (1)$$

$$M_r = M_r^e - M_r^p, \quad M_\theta = M_\theta^e - M_\theta^p, \quad M_{r\theta} = M_{r\theta}^e - M_{r\theta}^p \quad \dots (2)$$

ここに、 $N_r^e, N_\theta^e, N_{r\theta}^e$ は弾性状態と仮定して求められる膜力と膜せん断力、 $M_r^e, M_\theta^e, M_{r\theta}^e$ は弾性状態の曲げおよびねじりモーメントで、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N_r^e &= \tilde{E}_r (u_{,r} + \frac{1}{2} \bar{w}_{,r}^2 - \frac{1}{2} w_{0,r}^2) + \tilde{E}_t \left\{ \frac{1}{r} (u + v_{,0}) + \frac{1}{2r^2} \bar{w}_{,\theta}^2 - \frac{1}{2r^2} w_{0,\theta}^2 \right\}, \\ N_\theta^e &= \tilde{E}_t (u_{,r} + \frac{1}{2} \bar{w}_{,r}^2 - \frac{1}{2} w_{0,r}^2) + \tilde{E}_\theta \left\{ \frac{1}{r} (u + v_{,0}) + \frac{1}{2r^2} \bar{w}_{,\theta}^2 - \frac{1}{2r^2} w_{0,\theta}^2 \right\}, \\ N_{r\theta}^e &= \tilde{E}_{r\theta} \left(\frac{1}{r} u_{,\theta} - \frac{1}{r} v_{,r} + v_{,r} + \frac{1}{r} \bar{w}_{,r} \bar{w}_{,\theta} - \frac{1}{r} w_{0,r} w_{0,\theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} M_r^e &= - \left[D_r (\bar{w}_{,rr} - w_{0,rr}) + \frac{D_t}{r} \left\{ \bar{w}_{,r} - w_{0,r} + \frac{1}{r} (\bar{w}_{,\theta\theta} - w_{0,\theta\theta}) \right\} \right], \\ M_\theta^e &= - \left[D_t (\bar{w}_{,rr} - w_{0,rr}) + \frac{D_\theta}{r} \left\{ \bar{w}_{,r} - w_{0,r} + \frac{1}{r} (\bar{w}_{,\theta\theta} - w_{0,\theta\theta}) \right\} \right], \\ M_{r\theta}^e &= - 2 D_{r\theta} \left\{ \frac{1}{r} (\bar{w}_{,r\theta} - w_{0,r\theta}) - \frac{1}{r^2} (\bar{w}_{,\theta} - w_{0,\theta}) \right\} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

ここに、 $\tilde{E}_r, \tilde{E}_\theta$ は極限方形扇形板の伸び刚度、 $\tilde{E}_{r\theta}$ はせん断刚度、 $\tilde{E}_r = \nu_\theta^b \tilde{E}_r = \nu_r^b \tilde{E}_\theta$ で ν_r^b, ν_θ^b は伸びのポアソン比、 D_r, D_θ は曲げ刚度、 $D_{r\theta}$ はねじり刚度、 $D_t = \nu_\theta^b D_r = \nu_r^b D_\theta$ で ν_r^b, ν_θ^b は曲げのポアソン比である。式(1)、(2)中の $N_r^p, N_\theta^p, N_{r\theta}^p, M_r^p, M_\theta^p, M_{r\theta}^p$ はそれぞれ板厚方向の中立軸から Z での直応力 $\sigma_r^e, \sigma_\theta^e$, せん断応力 $\tau_{r\theta}^e$ の降伏応力を

超過した部分を数値積分することにより求められる。なお、コンマの後の添字はそれに関する微分を表す。

したがって、半径、円周および鉛直方向の11のつり合い式に式(1)~(4)を代入すると、次式が得られる。

$$-\frac{\tilde{E}_0}{r^2} u + \frac{\tilde{E}_1}{r} u_{,r} + \tilde{E}_r u_{,rr} + \frac{\tilde{E}_0}{r^2} u_{,\theta\theta} - \frac{\tilde{E}_0 + \tilde{E}_r}{r^2} v_{,\theta} + \frac{\tilde{E}_1 + \tilde{E}_{rr}}{r} v_{,\theta\theta} \\ = -\frac{\tilde{E}_r - \tilde{E}_1}{2r} (\bar{w}_{,r}^2 - w_{\theta,r}^2) + \frac{\tilde{E}_0 + \tilde{E}_1}{2r^3} (\bar{w}_{,\theta}^2 - w_{\theta,\theta}^2) - \tilde{E}_r (\bar{w}_{,r} \bar{w}_{,rr} - w_{\theta,r} w_{\theta,rr}) - \frac{\tilde{E}_0}{r^2} (\bar{w}_{,r} \bar{w}_{,\theta\theta} - w_{\theta,r} w_{\theta,\theta\theta}) \\ - \frac{\tilde{E}_1 + \tilde{E}_{rr}}{r^2} (\bar{w}_{,\theta} \bar{w}_{,r\theta} - w_{\theta,\theta} w_{\theta,r\theta}) + N_{rr}^p + \frac{1}{r} N_{r\theta}^p + \frac{1}{r} (N_r^p - N_\theta^p) \dots \dots \dots (5.a)$$

$$\frac{\tilde{E}_0 + \tilde{E}_{rr}}{r^2} u_{,\theta} + \frac{\tilde{E}_1 + \tilde{E}_{rr}}{r} u_{,\theta r} - \frac{\tilde{E}_0}{r^2} v + \frac{\tilde{E}_r}{r} v_{,r} + \tilde{E}_{r\theta} v_{,r\theta} + \frac{\tilde{E}_0}{r^2} v_{,\theta\theta} \\ = -\frac{\tilde{E}_{r\theta}}{r^2} (\bar{w}_{,r} \bar{w}_{,\theta} - w_{\theta,r} w_{\theta,\theta}) - \frac{\tilde{E}_{r\theta}}{r} (\bar{w}_{,\theta} \bar{w}_{,rr} - w_{\theta,\theta} w_{\theta,rr}) - \frac{\tilde{E}_0}{r^3} (\bar{w}_{,\theta} \bar{w}_{,\theta\theta} - w_{\theta,\theta} w_{\theta,\theta\theta}) \\ - \frac{\tilde{E}_1 + \tilde{E}_{rr}}{r^2} (\bar{w}_{,r} \bar{w}_{,r\theta} - w_{\theta,r} w_{\theta,r\theta}) + N_{r\theta}^p + \frac{1}{r} N_{\theta,\theta}^p + \frac{2}{r} N_{r\theta}^p \dots \dots \dots (5.b)$$

$$D_r (\bar{w}_{,rrrr} + \frac{2}{r} \bar{w}_{,r} \bar{w}_{,rrr}) + 2(D_1 + 2D_2) (\frac{1}{r^2} \bar{w}_{,rr\theta\theta} - \frac{1}{r^3} \bar{w}_{,r\theta\theta} + \frac{1}{r^4} \bar{w}_{,\theta\theta}) + D_\theta (\frac{1}{r^4} \bar{w}_{,\theta\theta\theta\theta} - \frac{1}{r^2} \bar{w}_{,rr} + \frac{2}{r^4} \bar{w}_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^3} \bar{w}_{,r}) \\ = D_r (w_{\theta,rrrr} + \frac{2}{r} w_{\theta,r} w_{\theta,rrr}) + 2(D_1 + 2D_2) (\frac{1}{r^2} w_{\theta,rr\theta\theta} - \frac{1}{r^3} w_{\theta,r\theta\theta} + \frac{1}{r^4} w_{\theta,\theta\theta}) + D_\theta (\frac{1}{r^4} w_{\theta,\theta\theta\theta\theta} - \frac{1}{r^2} w_{\theta,rr} + \frac{2}{r^4} w_{\theta,\theta\theta} + \frac{1}{r^3} w_{\theta,r}) \\ + \bar{w}_{,rr} (\tilde{E}_r (u_{,r} + \frac{1}{2} \bar{w}_{,r}^2 - \frac{1}{2} w_{\theta,r}^2) + \tilde{E}_1 \{ \frac{1}{r} (u + v_{,\theta}) + \frac{1}{2r^2} \bar{w}_{,\theta}^2 - \frac{1}{2r^2} w_{\theta,\theta}^2 \}) + (\frac{1}{r} \bar{w}_{,r} + \frac{1}{r^2} \bar{w}_{,\theta\theta}) (\tilde{E}_1 (u_{,r} + \frac{1}{2} \bar{w}_{,r}^2 \\ - \frac{1}{2} w_{\theta,r}^2) + \tilde{E}_0 \{ \frac{1}{r} (u + v_{,\theta}) + \frac{1}{2r^2} \bar{w}_{,\theta}^2 - \frac{1}{2r^2} w_{\theta,\theta}^2 \}) + 2(-\frac{1}{r^2} \bar{w}_{,\theta} + \frac{1}{r} \bar{w}_{,r\theta}) \tilde{E}_{r\theta} (\frac{1}{r} u_{,\theta} - \frac{1}{r} v_{,r} + \frac{1}{r} \bar{w}_{,r} w_{\theta,\theta} \\ - \frac{1}{r} w_{\theta,r} w_{\theta,\theta}) - \frac{2}{r} M_{rr}^p - M_{rr}^p + \frac{1}{r} M_{\theta,r}^p - \frac{1}{r^2} M_{\theta,\theta}^p - \frac{2}{r^2} M_{r\theta}^p - \frac{2}{r} M_{r\theta}^p - N_r^p \bar{w}_{,rr} - N_\theta^p (\frac{1}{r} \bar{w}_{,r} + \frac{1}{r^2} \bar{w}_{,\theta\theta}) \\ - 2N_{r\theta}^p (-\frac{1}{r^2} \bar{w}_{,\theta} + \frac{1}{r} \bar{w}_{,r\theta}) \dots \dots \dots (5.c)$$

(2) 境界条件 面外の変形に対する条件は周辺で単純支持あるいは固定されているものとする。面内の変形に対しては、直線辺($\theta=0, \theta_0$)での圧縮強制変位、②一様圧縮荷重の2通りを、曲線辺($r=r_1, r_0$)では $u=N_{r\theta}=0$ の条件とする。

3. 数値計算法 材料の塑性化を加味した基礎微分方程式(5)は非線形連立偏微分方程式であり、上述の境界条件のもとで厳密解を誘導することはほとんど不可能である。したがって、ここでは式(5)に差分法を適用し、非線形多元連立代数方程式に変換後、解の収束を速めるパラメータを用いた反復法により解を求める。

上述の解析法によれば、塑性化の影響が式(5)で明らかに示すようにベクトルとして扱えるため、多元連立方程式の解法には三角分解法(LR法)が利用でき、時間の短縮化が計られる。また、本法では無次元化パラメータによるパラメトリック解析が容易に行えるなど多くの利点を有している。

4. 数値計算結果 本解析法の妥当性を検討するため、初期たわみを有する正方形圧縮板の解(有限要素解)⁵⁾と比較する。境界条件は周辺単純支持とし、面内に関しては端辺で一様圧縮強制変位と $N_{r\theta}=0$ 、側辺では $N_r=N_{r\theta}=0$ の面内自由の条件とした。Fig. 2には板中央点における全たわみ $\bar{w}$ と平均圧縮荷重 $\bar{\sigma}$ の関係を種々の差分分割数に対して示した。図から明らかに、弾性領域における結果は Coan、小松らの結果と一致している。また、分割数の増加とともに耐荷力は低下し、一定値に収れんする傾向にある。本法によれば、小松らの解に比較して若干高めの耐荷力を推定するが、近似的な境界条件式の採用などを考慮に入れると本解析結果はほぼ妥当であり、利用度の高い解析法であると思われる。なお、扇形補剛板の耐荷力については当日詳細に報告する。

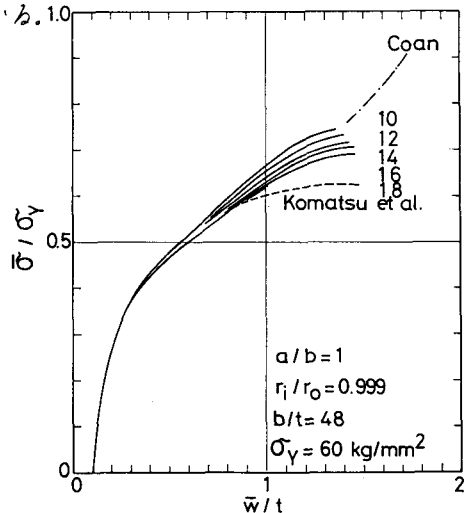


Fig. 2 板中央点の荷重-たわみ曲線

1) Dogaki, M., I. Mikami and H. Yonezawa : Tech. Rep. of Kansai Univ., No. 22, pp.137~147, Mar., 1981. 2) Dogaki, M. and H. Yonezawa : Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 28, pp.61~69, 1980. 3) Dogaki, M. and H. Yonezawa : Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 30, pp. 121~133, 1981. 4) Lin, T.H. : Theory of Inelastic Structures, John Wiley and Sons, 1968. 5) 小松, 北田, 富田 : 土木学会論文報告集, No. 244, pp. 1~14, 1976-72. 6) Coan, J.M. : Jour. of Applied Mechanics, Vol. 18, No. 2, pp. 143~151, June, 1961.