

早稲田大学 正員 依田 照彦
鹿島建設 田中 豊
前田建設 千葉 俊弘

1. まえかき

骨組構造解析の代表的な数値解法の一つに有限要素法がある。しかしながら、標準的な有限要素法は、区分子項式を試験関数に用いているため、幾何学的かつ材料的非線形性を考慮しなければならないような有限変位問題に対しては、高次の非線形性を考慮した解析が必要となり、必ずしも容易な数値解析手法とは言い難い¹⁾。そこで、本報告では、平面骨組構造の幾何学的および材料的非線形性を考慮した簡易な数値解析手法を、微小ひずみ・有限変位の範囲内で定式化することを試みる。

本手法の特長としては次のような点が挙げられる。

- (1) 平面骨組構造の幾何学的・材料的非線形解析としては、標準的な有限要素解析に比べ、簡易である。
- (2) 材料特性を表わす応力-ひずみ曲線として、任意曲線が使用できる。
(ただし、応力とひずみが一対一対応する連続関数を仮定している。)
- (3) 設計を考えた場合必要となる骨組構造の初期不整(初期変位・残留応力)も容易に考慮できる。
- (4) 動的非線形問題あるいは履歴現象の解析にも適用可能である。

2. 幾何学的非線形解析

平面骨組構造を一次元部材より構成される骨組構造として扱い、微小分割した要素も十分棒部材と見做せるものと仮定する。さらに微小要素内での曲げモーメントと軸力は一定と見做しても、その誤差は微小であるとすると。それ故、図1に示すような④番目の要素内では、内力としての曲げモーメント $M_{\textcircled{4}}$ と軸力 $N_{\textcircled{4}}$ は、節点力と関係づけられ、

$$M_{\textcircled{4}} = \frac{M_{i-1,R} + M_{i,L}}{2}, \quad N_{\textcircled{4}} = \frac{N_{i-1,R} + N_{i,L}}{2} \quad (1.a,b)$$

が成り立つ。せん断変形を無視し平面保持の法則が成立すると仮定すれば、要素内の曲げモーメント $M_{\textcircled{4}}$ と軸力 $N_{\textcircled{4}}$ は、横断面内の上端と下端のひずみ $\varepsilon_u^{\textcircled{4}}, \varepsilon_l^{\textcircled{4}}$ を用いて表わすことができる。(材料的非線形性を考慮する場合には関数関係になる。) また、有限変位を扱っているものの、要素の変形そのものは小さいとしている点に注目すれば、変形後の微小要素の伸び $\Delta S_{\textcircled{4}}$ と角変化 $\Delta \theta_{\textcircled{4}}$ は

$$\Delta S_{\textcircled{4}} = \Delta x_{\textcircled{4}} \left(1 + \frac{\varepsilon_l^{\textcircled{4}} + \varepsilon_u^{\textcircled{4}}}{2} \right), \quad \Delta \theta_{\textcircled{4}} = \frac{\Delta S_{\textcircled{4}} (\varepsilon_l^{\textcircled{4}} - \varepsilon_u^{\textcircled{4}})}{h_{\textcircled{4}}} \quad (2.a,b)$$

と表わせる。ここに、 $\Delta x_{\textcircled{4}}$ は変形前の要素の長さであり、 $h_{\textcircled{4}}$ は要素の横断面の高さである。したがって、 $M_{\textcircled{4}}, N_{\textcircled{4}}$ より $\varepsilon_u^{\textcircled{4}}, \varepsilon_l^{\textcircled{4}}$ が求まり、さらに $\Delta S_{\textcircled{4}}, \Delta \theta_{\textcircled{4}}$ が求まる。この結果を利用すれば、節点 $i-1$ の座標と回転角 $(x_{i-1}, y_{i-1}, \theta_{i-1})$ から節点 i の座標と回転角 (x_i, y_i, θ_i) を求めるこ

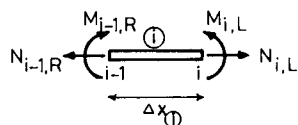


図1 微小要素の断面力

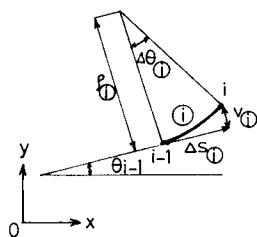


図2 微小要素の変形状態

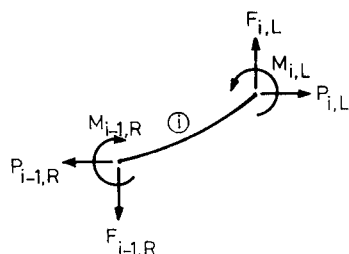


図3 微小要素の力のつり合い

と加できる(図2)。すなわち、 i 節点のたわみ v_D は次式のようになる。

$$v_D = f_D (1 - \cos(4\theta_D)) = \frac{\Delta S_D}{2\theta_D} (1 - \cos(4\theta_D)) \quad (3)$$

また、節点 i の座標は

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x_D \cos(\theta_{i-1}) - v_D \sin(\theta_{i-1}), \quad y_i = y_{i-1} + \Delta x_D \sin(\theta_{i-1}) + v_D \cos(\theta_{i-1}) \quad (4.a,b)$$

と表わされ、節点 i の回転角は

$$\theta_i = \theta_{i-1} + \Delta \theta_D \quad (5)$$

と表わされる。

このとき、要素①の内部での力のつり合い式は

$$P_{i,L} = P_{i-1,R}, \quad F_{i,L} = F_{i-1,R} \quad (6.a,b)$$

$$M_{i,L} = M_{i-1,R} - F_{i-1,R}(x_i - x_{i-1}) + P_{i-1,R}(y_i - y_{i-1}) \quad (6.c)$$

となる(図3)。

以上の式(1)~(6)を用い、初期値として変位(例えば線形解)を与えれば、新しい節点の位置が計算できる。この得られた結果を初期値として同様な計算を行い、所要の精度が得られるまで演算を繰返す。

3. 材料的非線形解析への拡張

平面保持の法則が成り立つと仮定すれば、2節の展開は、材料的に非線形な骨組構造にもそのまま適用できる。ただし、材料的非線形解析の場合には、微小要素①の曲げモーメント M_D 、軸力 N_D と、横断面の上下端のひずみ $\varepsilon_u^D, \varepsilon_l^D$ との間の関数関係を、電子計算機内にファイルしておく手法を取った。

4. 数値計算例

数値計算例としては、図4, 6に示すような門型ラーメンを使用した。断面の諸量等は図中に示すとうりである。幾何学的非線形性のみを考慮した場合の計算結果を図5に示す。得られた値と骨組構造解析のライブラリー ISAS II (東京大学大型計算機中心) を使用した値とを比較すると、線形材料を使用した場合の幾何学的非線形解析は、座屈問題との関連において、妥当であることが分る。また、材料的非線形解析への拡張の一例として、バイリニア特性を有する材料を用いて幾何学的非線形解析を行った。図7に示すように、この場合についても妥当な結果が得られていると考えられる。

5. あとがき

数値計算の結果によれば、材料的線形性を仮定した幾何学的非線形解析では、繰返し演算の回数も少なく、率に満足すべき結果が得られている。しかしながら、材料特性を変形に応じて変化させた場合には、座屈問題との関連において、変位の増大とともに、収束状況が悪化する傾向がある。

参考文献

1) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1977.

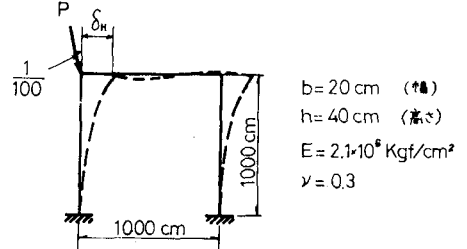


図4 門型ラーメン(線形材料)

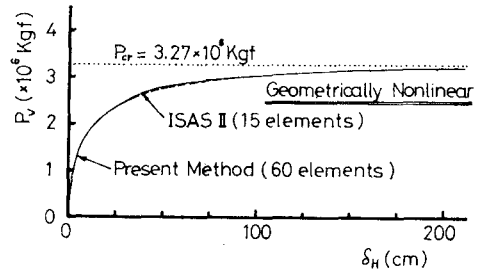


図5 鉛直方向荷重 P_v と水平方向変位 δ_H の関係

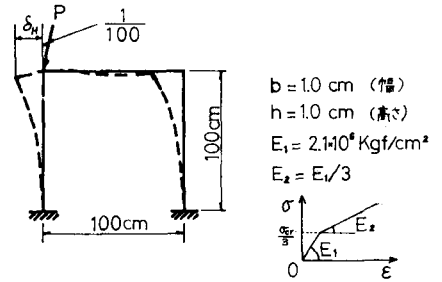


図6 門型ラーメンおよび応力-ひずみ線図

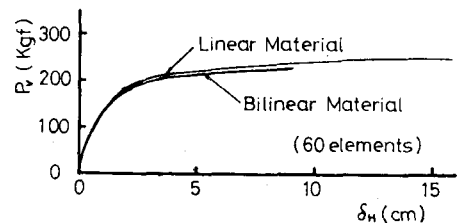


図7 鉛直方向荷重 P_v と水平方向変位 δ_H の関係