I-146　有限変位薄肉はり要素の離散化に関する一展開

法政大学工学部　正員　阿井　正博
法政大学大学院　学生員　伊東　賢

1. はじめに

任意の有限変位を扱う変位法において，要素の空間位置を剛体位置と変形の自由度に分解して離散化を展開することは，平面曲げ要素ではかなり以前から行なわれており[1]，その一般的な展開記述も示されている[2]。本文では，その一般論に準じた薄肉直線はり要素の離散化を展開する。

2. 要素位置と要素力

3方向の並進，3自由度の回転および捩れを両端で考える14自由度の薄肉はり要素の空間位置のパラメータを次のように定める。空間固定の直交デカルト座標$\{X,Y,Z\}$の直交単位基ベクトルを$\{\mathbb{I}_{(X,Y,Z)}\}$と表す。両端面A,Bの接続する節点をI,Jとして，埋め込まれてI,Jと伴に並進･回転する直交単位ベクトル$\{\mathfrak{e}_{(x,y,z)}\}^{I,J}$を考える(Fig.1)。端面の主軸2方向$(\xi,\eta)$，軸線方向$(\zeta)$の直交単位ベクトル$\{\mathfrak{e}_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}$は，特定の接続角$\{\Gamma_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}$（$\mathfrak{e}_\xi\to\mathfrak{e}_\eta\to\mathfrak{e}_\zeta$軸まわりの順のEuler角)で，$\{\mathfrak{e}_{(x,y,z)}\}^{I,J}$に固定されるのが普通であり，$\{\mathfrak{e}_{(x,y,z)}\}^{I,J}$の$\{\mathbb{I}_{(X,Y,Z)}\}$に対するEuler角$\{\Phi_{(x,y,z)}\}^{I,J}$（$\mathfrak{e}_x\to\mathfrak{e}_y\to\mathfrak{e}_z$軸まわりの順)で両端面の回転を表現するものとし，並進は空間座標$(X,Y,Z)^{I,J}$で表わし，捩れ率を$\tau^{A,B}$として要素位置$\{\mathbb{X}\}_{(e)}$を

$$\{\mathbb{X}\}_{(e)}=\{(X,Y,Z)^I_,\ (\Phi_{(x,y,z)})^I_,\ \tau^A,\ (X,Y,Z)^J_,\ (\Phi_{(x,y,z)})^J_,\ \tau^B\}\qquad(1)$$

で定義する。対応する要素力$\{\mathbb{F}\}_{(e)}$は，すなわち$\{\mathbb{X}\}_{(e)}$での微小$\delta\{\mathbb{X}\}_{(e)}$と$\{\mathbb{F}\}_{(e)}$の成分間内積が要素の微小外力仕事となる$\{\mathbb{F}\}_{(e)}$は[2]，節点に作用する力の$\{\mathbb{I}_{(X,Y,Z)}\}$方向成分$\{F_{(X,Y,Z)}\}$と作用モーメントのEuler角$\{\Phi_{(x,y,z)}\}$に対する共変成分$\{M^*_{(x,y,z)}\}$[3]およびバイモーメント$M_W$を用いて，

$$\{\mathbb{F}\}_{(e)}=\{(F_{(X,Y,Z)})^I_,\ (M^*_{(x,y,z)})^I_,\ M_W^A,\ (F_{(X,Y,Z)})^J_,\ (M^*_{(x,y,z)})^J_,\ M_W^B\}\qquad(2)$$

で表わされる。

3. 剛体位置と変形

要素の剛体変位と伴に並進回転する直交単位ベクトル$\{\mathfrak{e}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{(e)}$を次のように定める(Fig.1)。$\{\mathfrak{e}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{(e)}$はA点にあり，A→B方向に$\mathfrak{e}_{\bar{z}}$，$(\mathfrak{e}_\eta^A$-$\mathfrak{e}_{\bar{z}})$面内で$\mathfrak{e}_{\bar{z}}$と直交する方向に$\mathfrak{e}_{\bar{y}}$，$\{\mathfrak{e}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{(e)}$が右手系となるように$\mathfrak{e}_{\bar{x}}$を定める。

$\{\mathfrak{e}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{(e)}$の$\{\mathbb{I}_{(X,Y,Z)}\}$に対する変換：

$$\{\mathfrak{e}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{(e)}=[T^{(e)}(\{\mathbb{X}\})]\{\mathbb{I}_{(X,Y,Z)}\}\qquad(3)$$

の直交マトリックスの各成分は，幾何学的展開のもとに$\{\mathbb{X}\}_{(e)}$に対して得ることができる。要素の変形自由度は，$\{\mathbb{X}\}_{(e)}$に含まれる剛体変位(6自由度)を拘束したときの残る8自由度と考えてよく，このことは，前述の$\{\mathfrak{e}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{(e)}$を空間固定したときにA点の並進と$\mathfrak{e}_\eta^A$の$\mathfrak{e}_{\bar{z}}$-軸まわりの回転の拘束，およびB点の$\mathfrak{e}_{\bar{z}}$-方向以外の並進の拘束として定まる静定支持のもとでの残る両端自由度と考えてよく，$\{\mathfrak{e}_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}$の$\{\mathfrak{e}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{(e)}$に対するEuler角を$\{\theta_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}$($\theta_\zeta^A=0$)，A-B間の変形後の長さを$(1+\epsilon)\ell$（$\ell$:初期長さ）として，変形$\mathfrak{E}_{(e)}$は

$$\mathfrak{E}_{(e)}=\{\epsilon,\ \theta_\xi^A,\ \theta_\xi^B,\ \theta_\eta^A,\ \theta_\eta^B,\ \theta_\zeta^B,\ \ell\tau^A,\ \ell\tau^B\}\qquad(4)$$

で定義することができる。

$\mathfrak{E}_{(e)}$中の各パラメータは$\{\mathbb{X}\}_{(e)}$に対して次のように展開され，変形－要素位置関係

$$\mathfrak{E}_{(e)}=\Gamma_e\ (\{\mathbb{X}\})\qquad(5)$$

を誘導することができる。ϵは$(X,Y,Z)^{I,J}$を用いた両端間距離より得られ，$\{\Gamma_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}$($[T^{A,B\,I,J}]$)と$\{\Phi_{(x,y,z)}\}^{I,J}$($[T^{I,J}]$)による変換$\{\mathfrak{e}_{(\xi,\eta,\zeta)}\}=[T^{A,B}]\{\mathbb{I}_{(X,Y,Z)}\}$ ($[T^{A,B}]=[T^{A,B\,I,J}][T^{I,J}]$)と式(3)の変換を組み合わせて定まる$\{\mathfrak{e}_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}=[T^{A,B}][T^{(e)}]^T\{\mathfrak{e}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{(e)}$の関係と$\{\theta_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}$による直接の関係$\{\mathfrak{e}_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}=[T^{A,B(e)}]\{\mathfrak{e}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{(e)}$を等しいとおく方程式より，$\{\theta_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}$を求めることができる。

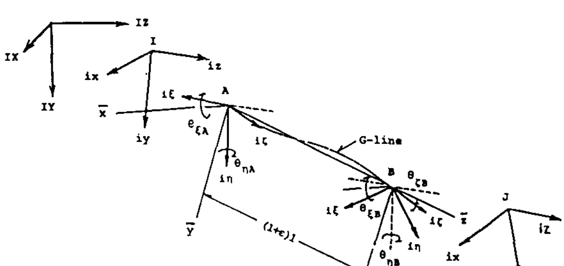

Fig.1 Coordinate Systems

4. 要素力－変形力関係と反傾関係

変形に対応する変形力$\mathfrak{f}_{(e)}$は，すなわち$\mathfrak{E}_{(e)}$での$\delta\mathfrak{E}_{(e)}$と

$\mathbf{f}_{(e)}$との内積が微小内力仕事となる$\mathbf{f}_{(e)}$の各成分は、式(4)の$\mathcal{E}_{(e)}$に対して、A,B点に作用するモーメントの$\{\theta_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}$に対する共変成分を$\{\overset{*}{M}_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}$, B点に$\mathbf{i}_{\bar{z}}$方向に作用する力をHとして

$$\mathbf{f}_{(e)}=\{H\ell,\ \overset{*}{M}{}^{A}_{\xi},\ \overset{*}{M}{}^{B}_{\xi},\ \overset{*}{M}{}^{A}_{\eta},\ \overset{*}{M}{}^{B}_{\eta},\ \overset{*}{M}{}^{B}_{\zeta},\ M^{A}_{w}/\ell,\ M^{B}_{w}/\ell\} \qquad (6)$$

として表わされる。

要素の剛体的つり合い条件（すなわち前述の静定支持での反力）と剛体回転を考慮すれば、変形力$\mathbf{f}_{(e)}$に対して要素力$\{\mathbb{F}\}_{(e)}$を求めることができる。$\{\mathbf{i}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{(e)}$に関する成分表示の力とモーメントの剛体的つり合い条件：

$$\{F_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{A}+\{F_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{B}=\{0,\ 0,\ 0\}$$

$$\{M_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{A}+\{M_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{B}+(1+\epsilon)\ell\{-F^{B}_{\bar{y}},\ F^{B}_{\bar{x}},\ 0\}=\{0,\ 0,\ 0\} \qquad (7.a,b)$$

において、Euler角$\{\theta_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}$に関する回転軸成分より共変成分への変換[3]：$[Z^{A,B}_{(\xi,\eta,\zeta)}]$、および$\{\mathbf{i}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{(e)}$より$\{\mathbf{i}_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}$への直交変換：$[T^{A,B(e)}]$を考慮し、$F^{B}_{\bar{y}}=H$として展開すれば、$\{M_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}$と$\{F_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}$を

$$\{F_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}=[Tr^{A,B}_{F}\ (\mathcal{E}_{(e)})]\mathbf{f}_{(e)}$$

$$\{M_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}=[Tr^{A,B}_{M}\ (\mathcal{E}_{(e)})]\mathbf{f}_{(e)} \qquad (8.a,b)$$

の形で得ることができる。式(2)で表わされる$\{\mathbb{F}\}_{(e)}$の成分は直交変換：$[T^{A,B\,I,J}]$と$[T^{I,J}]$、およびEuler角$\{\Phi_{(x,y,z)}\}^{I,J}$に関する回転軸成分より共変成分への変換：$[Z^{I,J}_{(x,y,z)}]$を考えて

$$\{\mathbb{F}\}_{(e)}=[Q_{F(e)}(\{\mathbb{X}\})]\mathbf{f}_{(e)}$$

$$[Q_{F(e)}]=\begin{bmatrix}[T^{I}]^{T}[T^{AI}]^{T}[Tr^{A}_{F}]\\ [Z^{I}]\,[T^{AI}]^{T}[Tr^{A}_{M}]\\ \langle 0,0,0,0,0,0,\ell,0\rangle\\ [T^{J}]^{T}[T^{BJ}]^{T}[Tr^{B}_{F}]\\ [Z^{J}]\,[T^{BJ}]^{T}[Tr^{B}_{M}]\\ \langle 0,0,0,0,0,0,0,\ell\rangle\end{bmatrix} \qquad (9.a,b)$$

と表わされる。このとき、式(5)の微分関係を

$$\delta\mathcal{E}_{(e)}=[Q_{X(e)}(\{\mathbb{X}\})]\delta\{\mathbb{X}\}_{(e)}$$

$$[Q_{X(e)}]=[\partial\Gamma_{e}\ /\partial\{\mathbb{X}\}] \qquad (10.a,b)$$

で表わすものとすれば、$\{\mathbb{F}\}_{(e)}$と$\mathbf{f}_{(e)}$は、前述の意味で、それぞれ$\{\mathbb{X}\}_{(e)}$と$\mathcal{E}_{(e)}$に対応する成分であり、

仮想仕事の式：

$$\{\mathbb{F}\}^{T}_{(e)}\delta\{\mathbb{X}\}_{(e)}=\mathbf{f}_{(e)}\,\delta\mathcal{E}_{(e)} \qquad (11)$$

が成立し、式(10.a)を代入して式(9.a)を考えれば

$$[Q_{F(e)}(\{\mathbb{X}\})]=[Q_{X(e)}(\{\mathbb{X}\})]^{T} \qquad (12)$$

の反傾関係が成立する。

5. 変形力－変形関係

$\{\mathbf{i}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{(e)}$を固定して要素を静定支持する。文献(4)の基礎式は、長手方向埋込座標ζの各重心点の$\{\mathbf{i}_{(\xi,\eta,\zeta)}\}$の$\{\mathbf{i}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}^{(e)}$に対するEuler角$\{\alpha(\zeta),\beta(\zeta),\gamma(\zeta)\}$と重心線の伸び率$\epsilon_{G}(\zeta)$を基本の未知量とした式に変換されるが、伸び変形は後に微小歪の範囲で付加項[2]として考慮する。

このとき、各基礎式は

合応力－変位関係：$M(\xi)=EI_{\xi\xi}(\cos\gamma\cdot\beta'+\cos\beta\sin\gamma\cdot\alpha')$,

$M(\eta)=EI_{\eta\eta}(-\sin\gamma\cdot\beta'-\cos\beta\cos\gamma\cdot\alpha')$, $M_{w}=-EI_{ww}(\gamma'+\sin\beta\cdot\alpha')$,

$K=I_{G}/A\cdot N+EI^{*}_{GG}\cdot 1/2\,(\gamma'+\sin\beta\cdot\alpha')^{2}\quad(I^{*}_{GG}=I_{GG}-I^{2}_{G}/2)$

$T_{s}=GJ_{s}(\gamma'+\sin\beta\cdot\alpha') \qquad (13.a\sim e)$

つり合い式

$$\frac{d}{d\zeta}\left([T(\zeta)]^{T}\begin{Bmatrix}M(\eta)\\ -M(\xi)\\ T\end{Bmatrix}\right)+\begin{Bmatrix}-\sin\alpha\cos\beta\cdot F_{z}-\cos\alpha\cdot\cos\beta F_{y}\\ \cos\alpha\cos\beta\cdot F_{x}-\sin\beta\ F_{z}\\ \sin\beta\ F_{y}+\sin\alpha\cos\beta F_{x}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$N=\sin\beta F_{x}-\sin\alpha\cos\beta F_{y}+\cos\alpha\cos\beta F_{z}$$

$$T=T_{s}+M'_{w}+(\gamma'+\sin\beta\cdot\alpha')\cdot K \qquad (14.a\sim c)$$

と表わされる。ただし、記号( )'はζに関する微分、$[T(\zeta)]$は$\{\mathbf{i}_{(\xi,\eta,\zeta)}\}$の$\{\mathbf{i}_{(\bar{x},\bar{y},\bar{z})}\}$に対する直交マトリックス。

前述の$\{\theta_{(\xi,\eta,\zeta)}\}^{A,B}(\theta^{A}_{\zeta}=0)$, $\tau^{A,B}$、およびHの境界条件での以上の微分方程式に、文献2)と同様の摂動法を適用して2次非線形項程度までの解を得ることができ、変形力－変形関係：

$$\mathbf{f}_{(e)}=\Gamma_{f}\ (\mathcal{E}_{(e)}) \qquad (15)$$

が得られる。例えば式(15)の$\overset{*}{M}{}^{A}_{\xi}$の表示式は

$$\overset{*}{M}{}^{A}_{\xi}=\frac{EI_{\eta\eta}}{\ell}(4\theta^{A}_{\xi}+2\theta^{B}_{\xi})+\frac{E(I_{\xi\xi}-I_{\eta\eta})}{\ell}\{(\bar{d}^{(AA)}_{1}\theta^{A}_{\eta}\cdot\theta^{B}_{\zeta}+\bar{d}^{(AA)}_{2}\theta^{A}_{\eta}\cdot\ell\tau^{A}+\bar{d}^{(AA)}_{3}\theta^{A}_{\eta}\cdot\ell\tau^{B})+(\bar{d}^{(AB)}_{1}\theta^{B}_{\eta}\cdot\theta^{B}_{\zeta}+\bar{d}^{(AB)}_{2}\theta^{B}_{\eta}\cdot\ell\tau^{A}+\bar{d}^{(AB)}_{3}\theta^{B}_{\eta}\cdot\ell\tau^{B})\}+\frac{GJ_{s}}{2\ell}\{\bar{C}_{31}(\theta^{B}_{\eta}-\theta^{A}_{\eta})\theta^{B}_{\zeta}+\bar{C}_{32}(\theta^{B}_{\eta}-\theta^{A}_{\eta})\cdot\ell\tau^{A}+\bar{C}_{33}(\theta^{B}_{\eta}-\theta^{A}_{\eta})\ell\cdot\tau^{B}\}+\frac{H\ell}{30}(4\theta^{A}_{\xi}-\theta^{B}_{\xi}) \qquad (16)$$

として得られる。ここに$\bar{d}^{(AA)}_{i}$, $\bar{d}^{(AB)}_{i}$, $\bar{C}_{ij}$等は$\alpha=\sqrt{GJ_{s}/EI_{ww}}$で定まる定数である。

6. まとめ

本文の展開は、文献2)の一般論に全く準じており、その内容と文献3)の帰結として述べられていることがすべて満足されていることを本文での薄肉はりの式展開の上で具体的に確認した。

〈参考文献〉

1) Oran, C. "Tangent Stiffness in Plane Frames" J. of str. Div ASCE, Vol. 99 June 1973

2) 阿井正博・西野文雄, "離散化系の幾何学的非線形問題での力学関係と平面骨組への適用", 土木学会論文報告集 No 304 1980, 12

3) M. Ai, H. Nishino "A Tensor Expansion of Finite Rotation and Moment" Proc. of JSCE, No. 311, 1981, 7

4) 阿井正博・西野文雄, "薄肉はり要素の有限変位微小ひずみ問題としての一定式化", 土木学会論文報告集 No. 318 1982. 2