

山梨大学大学院 学生員 杉原 美好
 山梨大学工学部 正会員 深沢 泰晴
 東京大学大学院 学生員 岡本 晋
 山梨大学工学部 正会員 杉山 俊幸

1. はじめに 一般に、薄肉断面材の構造解析は、断面形状不変の仮定に基づいて行われている場合が多い。ところが、この仮定の妥当性は、これまで主として微小変位理論の立場から確認されてきたものであり、有限変位領域においても、同様な精度で適合しうるかどうかは、現在のところ必ずしも明確ではない。薄肉断面材からなる構造物の終局耐力のより正確な評価の一環として、必要度が高まりつつある有限変位解析において、この断面形状の変化の影響がどのように現われるかは、明確にしておかなければならない課題である。

そこで本報告では、薄肉開断面材の代表としてI型プレートガダーを選び、その横倒れ座屈後挙動のような大きな変形に際して、ウェブプレートの面外への曲げ変形が如何なる影響を及ぼすかを弾性範囲内で調べてみた。この種の問題の微小変位解析は、古くはGoodier & Borton¹⁾や奥村²⁾によって行われているが、ここでは有限要素法の適用の便宜上、変位場の設定から出発して、仮想仕事の原理によって定式化した。さらに座屈後挙動の追跡は、既に開発した有限変位解析法³⁾によって行なった。

2. 微小変位理論における基本式 図-1(a)に示すように、2軸対称のI型断面材に対して、直交デカルト座標系(0-x, y, z)、直交曲線座標系(n, s, z)を考える。部材上の任意点のx, y軸方向の変位成分u, vは次のように書ける；

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - y\varphi + (\alpha l - nm)\varphi \\ v &= v_0 + x\varphi + (-\alpha nl + xm^2)\varphi \end{aligned} \right\} \text{----(1)}$$

ここに、 u_0, v_0 は断面の図心Oのx, y軸方向の変位成分、 φ は断面全体のねじれ角、 ϕ はウェブの面外への曲げ変形によって生じるフランジ独自のねじれ角。また α は次式で表わされる量である；

$$\alpha = \left\{ \frac{d}{h} - 4 \left(\frac{d}{h} \right)^3 \right\} \frac{h}{2}$$

なお、 $(\cdot) = \frac{d}{dz}(\cdot)$ の意。さらに、 m, l は方向余弦で次式で定義される；

$$l = \cos(n, x), \quad m = \cos(n, y)$$

次に、部材上の任意点のn, s方向の変位成分 ξ, η はそれぞれ次式で表わされる；

$$\xi = n_0 l + v_0 m + (-y l + x m)\varphi + (\alpha l + x m)\varphi, \quad \eta = -u_0 m + v_0 l + (x l + y m)\varphi + n(-\alpha l + m^2)\varphi \text{----(2)}$$

ここで、薄肉の仮定 $\delta_{nz} = 0, \delta_{sz}^* = 0$ を適用すると、z軸方向の変位成分wが次式のように求まる；

$$w = w_0 - x u_0' - y v_0' - \{ -x^* y^* + n(-y l + x m) \} \varphi' - n(\alpha l + x m) \varphi' \text{----(3)}$$

ここに、 w_0 は断面の図心Oのz軸方向の変位成分、 $*$ 印はs軸上の値の意。また $(\cdot)' = \frac{d}{dz}(\cdot)$ 。

式(1), (2), (3)を用いて、断面上の任意点の歪成分は次のように求まる；

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_n &= \delta_{nz} = \delta_{sz} = 0, \quad \varepsilon_s = -n \ddot{\alpha} l \varphi \\ \varepsilon_z &= w_0' - x u_0'' - y v_0'' - \{ -x^* y^* + n(-y l + x m) \} \varphi'' - n(\alpha l + x m) \varphi'' \\ \delta_{sz} &= n \varphi' + n(-\alpha l + m^2) \varphi' \end{aligned} \right\} \text{----(4)}$$

この場合に、軸力および曲げモーメント以外に新たに定義される断面力は次のようである；

$$M_\omega = \int_A \sigma_z (x^* y^*) dA = -EI_{\omega\omega} \varphi'', \quad M_\nu = \int_A \sigma_s (-n \ddot{\alpha} l) dA = EI_{\nu\nu} \varphi''$$

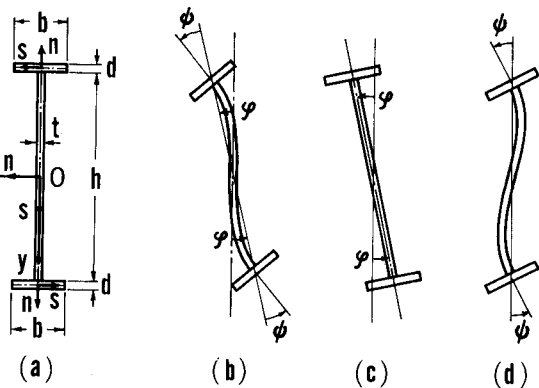


図-1 I型断面の寸法、座標系、ねじれ変形

$$T_x = \int_A \tau_{xz} (2n) dA = G I_{xx} \varphi' + G I_{x\mu} \varphi', \quad T_\mu = \int_A \tau_{xz} \{2n(m^2 - \alpha l)\} dA = G I_{x\mu} \varphi' + G I_{\mu\mu} \varphi'$$

上式中の断面定数は、 $I_{\omega\omega} = \int_A (x^* y^*)^2 dA$, $I_{\nu\nu} = \int_A (-n \alpha l)^2 dA$, $I_{xx} = \int_A (2n)^2 dA$

$$I_{x\mu} = \int_A (2n) \{2n(m^2 - \alpha l)\} dA, \quad I_{\mu\mu} = \int_A \{2n(m^2 - \alpha l)\}^2 dA \quad \text{等で定義される量である。}$$

3. 有限変位解析法の適用 ここで適用する有限変位解析法の基本的な考え方は、既に報告済み³⁾であるが、構造材料が有限変位領域においても微小ひずみの条件を満たすという前提のもとに、剛体回転に伴う変位を含まない要素座標系（移動座標系）での変位と、全体座標系（固定座標系）での変位に分けて取り扱い、前者の変位の解析に対しては線形理論が適合するように、荷重（変位）増分法を導入する手法である。したがって、各増分段階における解析においては、変位関数として式(1)～(3)、ひずみ-変位式として式(4)を用いることができる。また、増分つりあい式は初期応力の作用を考慮した仮想仕事の原理を表す次式で定められる；

$$\int_V [\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} + \sigma_{ij}^{(0)} u_{k,l} \delta u_{k,l} - \bar{P}_i \delta u_i] dV - \int_A \bar{S}_i \delta u_i dA = 0 \quad \text{----- (5)}$$

ここに、 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$, $\sigma_{ij}^{(0)}$ は初期応力, $\bar{P}_i$, $\bar{S}_i$ は各々物体力, 表面力の*i*方向成分。

なお、各増分段階に対する解は、誤差の集積を最小限にとどめるために、中点 Runge-Kutta 法による繰り返し計算によって、所定の相対誤差の範囲に収める。図-2は本法のチェックの意味で、エラスティカの厳密解と比較したものであり、荷重増分の中央点における座標変換行列を用いることの有効性を示している。

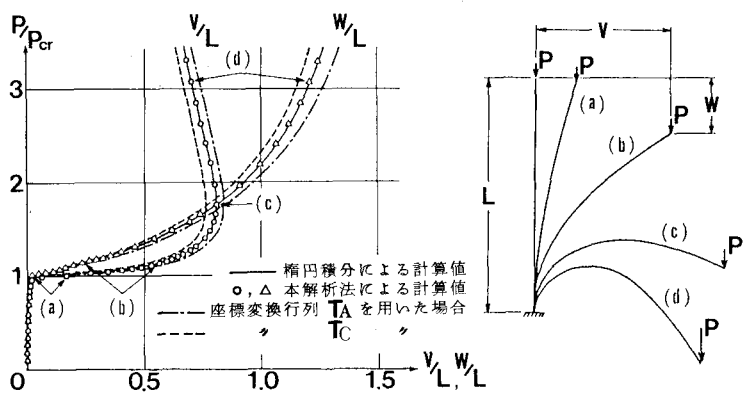


図-2 エラスティカ問題の楕円積分解との比較

4. 数値解析結果と考察

以上述べた理論を適用して、ウエブプレート（面外への曲げ変形）が、I形プレートガーダーの有限変位挙動、特に曲げねじれ座屈後の挙動に如何なる影響を及ぼすかを調べるため、①ねじれモーメント荷重による大変形解析、②鉛直荷重あるいは材端モーメント荷重による横座屈後挙動の解析、③偏

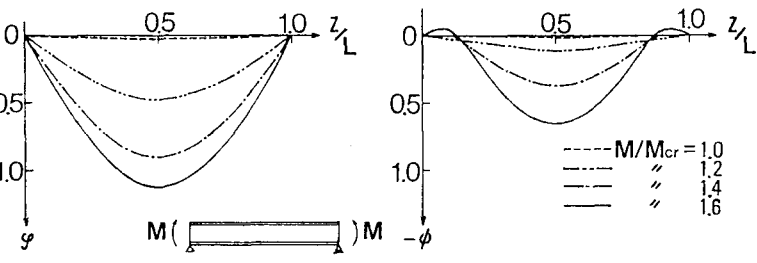


図-3 ねじれ角φおよびφの変化

心圧縮柱としての曲げねじれ座屈後挙動の解析等を具体的モデルに対して遂行している。

図-3は計算結果の一例である。すなわち、スパンL=10mの単純支持のI形プレートガーダー（b=32cm, d=2cm, h=100cm, t=0.7cm）が初期ねじれとして $\varphi = 0.005 \sin \frac{\pi}{L} z$ を有している時、両端曲げモーメント荷重による横座屈荷重超過後のねじれ角φおよびφの分布の変化の様子を示したものである。

なお、各種の数値解析結果とそれに対する考察についての報告は、紙面の都合上講演時にゆずる。

文献(1) Goodier, J.N. & M.V. Barston: The Effect of Web Deformation on the Torsion of I-Beams, *Journal of Applied Mechanics*, March, 1944. (2) 奥村 敏恵: 溶接組立材の歪屈に関する研究(第1報), 溶接学会誌, 昭和27年10月. (3) 丸山, 深沢: 鋼曲線けたの有限変位問題, 土木学会第34回年次講演概要集, I-104, 昭和54年9月. (4) 西野, 長谷川, 名取: 断面変形とせん断変形を考慮した長方形薄肉断面ばりの理論, 土木学会論文報告集, 第248号, 1976年4月.