

秋田大学 正員 薄木 征三
 秋田大学 正員 篠 農 知 徳
 秋田大学 正員 長 谷 部 薫

1. よえがき はりの有限変形問題を扱う場合の基本的な仮定は、断面形不変の仮定とせん断ひずみに関するオイラー・ベルヌーイの仮定である。しかしながら3次元問題として得られるであろう厳正解に比べれば、例えばはりの長さや短くなると、特に断面内の応力分布において厳正解との差異が大きくなることが予想される。本報告においては中実ばりの曲げ有限変位問題を対象として、断面形不変の仮定はこれを保持し、オイラー・ベルヌーイの仮定によって断面内のせん断応力を求める際に、せん断応力-せん断ひずみ関係から、せん断ひずみによる付加的なそりを考慮することによって、従来より精密な有限変位理論を提出する。

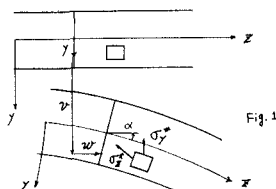
得られるつり合い方程式は1階連立微分方程式系であり、これは逐次近似法で解くことが可能である。

2. せん断ひずみを考慮した変位場 図-1の座標系を用

いる。問題の設定より奥行き方向の変位 u は考えないから、ひずみ-変位関係式は

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{--- (1)}$$

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{z} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \quad \text{--- (2)} \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{z} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \quad \text{(3)}$$



2.1 第1次近似 断面形不変とオイラー・ベルヌーイの仮定, $e_{yy} = 0$, $\gamma_{yz} = 0$ ---- (4)
 を満たす変位場は、

$$v = v_0 + y(\cos\alpha - 1), \quad w = w_0 - y\sin\alpha \quad \text{--- (5)}$$

である。ここで v_0 , w_0 は部材軸上の点の y , z 軸方向変位であり, $' = d/dz$ としてたわみ角 α は断面内で一定であり

$$\sin\alpha = v_0' = v', \quad \cos\alpha = 1 - w_0' = 1 - w' \quad \text{(6)}$$

ただしここで h は h が 1 に比べて小さい、微小ひずみの有限変位としている(西野ら)。つまり断面内の軸線上の点および任意点の z 軸方向の線素の伸びを g_0 , g とするとき, $g_0 = g = 1$ とする。式(3), (5)より

$$e_{zz} = w_0' + \{ (v_0')^2 + (w_0')^2 \} / z - y\alpha' \quad \text{(7)}$$

そこで ρ をたわみ曲線の曲率半径とすると, $(1 + y/\rho)^2 \approx 1 + 2y/\rho$ と近似し $(y/\rho)^2$ の項は無視した。

2.2 修正変位場 微小ひずみを前提とすると、はりが変位した後の z 軸方向の応力のつり合い式は

$$\frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yz} b) + b \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz}) = 0 \quad \text{(8)}$$

ただし物本力は無視する。又 σ_{zz} , τ_{yz} は実応力であり、フックの法則 $\sigma_{zz} = E e_{zz}$ を上式へ代入して積分し、 $\tau_{yz} b$ について解く。ついで $\tau_{yz} = G \gamma_{yz}$ を用いると断面内のせん断ひずみは

$$\gamma_{yz} = \{ A_y (w_1'' \cos\alpha_1 + v_1'' \sin\alpha_1) - G y \alpha_1' \} (E/Gb) \quad \text{(9)}$$

v_1 , w_1 , α_1 は式(5)の v_0 , w_0 , α を第1近似値とすることを表す。又 $A_y = \int y^2 dA$,

$$G_y = \int y^3 dA \quad \text{--- (10)} \quad \text{上のせん断ひずみによる付加的な変位を考慮した変位場を } v^{(2)},$$

$w^{(2)}$ とすると、仮定 $e_{yy} = 0$ と式(1)と(9)より

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} \right)^2 \right\} = 0, \quad \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} = -\frac{E}{Gb} G_y \alpha_1'' \quad (11)$$

を得る。ここで第2式の右辺では式(9)で曲げに伴うせん断ひずみだけを考慮し軸ひずみの項は無視した。
上式の解として

$$v^{(2)} = v_2 + \int_0^y \{ \cos(\gamma_2 - \alpha_2) - 1 \} dy, \quad w^{(2)} = w_2 + \int_0^y \sin(\gamma_2 - \alpha_2) dy \quad (12)$$

を得る。 v_2, w_2 は部材軸上の点の変位であり γ_2, α_2 は

$$\sin \gamma_2 = -E G_y \alpha_1'' / G b \quad (13)$$

$$\sin \alpha_2 = v_2' = (v^{(2)})', \quad \cos \alpha_2 = 1 + w_2' = 1 + (w^{(2)})' \quad (14)$$

を満たすような角である。式(14)は修正された断面回転角 α_2 を断面内で一定と見なすことに等しい。

微小ひずみ ($\gamma_2 \ll 1$) であるから

$$\sin(\gamma_2 - \alpha_2) = \gamma_2 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2, \quad \cos(\gamma_2 - \alpha_2) = \cos \alpha_2 + \gamma_2 \sin \alpha_2 \quad (15)$$

と表わせる。その結果(12)式は $\alpha_1'' = V$ と書き換えて

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 + y(\cos \alpha - 1) - E B_y V \sin \alpha / G \\ w &= w_0 - y \sin \alpha - E B_y V \cos \alpha / G \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

となる。ここで $v_2, v^{(2)}, \alpha_2$ などは改めてそれぞれ v_0, v, α と書き直した。又 $B_y = \int_0^y G_y / b \cdot dy$ である。上式を(3)へ代入すれば

$$E_{xx} = w_0' + \frac{1}{2} \{ (v_0')^2 + (w_0')^2 \} - y \alpha' - E B_y V / G \quad (17)$$

を得る。ただし $(y/\rho)^2$ や $(V)^2$ 以上の項は無視した。せん断ひずみは式(11)の右辺である。

3. つり合い式 仮想仕事の原理から、せん断ひずみとして式(11)の右辺、直ひずみとして式(17)を用いると次のつり合い式と境界条件を得る。ただし分布荷重は作用していないとする。

$$\begin{aligned} -(M' \cos \alpha)' - (N \sin \alpha)' &= 0 & \delta v_0 &= 0 \text{ 又は } M' \cos \alpha + N \sin \alpha - \bar{Q}_y = 0 \\ -(N \cos \alpha)' + (M' \sin \alpha)' &= 0 & \delta w_0 &= 0 \text{ 又は } N \cos \alpha - M' \sin \alpha - \bar{N} = 0 \\ \frac{H'}{G} - \frac{T}{G b} &= 0 \quad (18) & \delta \alpha &= 0 \text{ 又は } -M + (\bar{M}_{yy} - \bar{K}_{xy} V) \sin \alpha^* \\ * + (\bar{M}_{xy} + \bar{K}_{yy} V) \cos \alpha &= 0, & \delta V &= 0 \text{ 又は } -H + \bar{K}_{yy} \sin \alpha + \bar{K}_{xy} \cos \alpha = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} H &= \int_A \frac{E}{G} B_y \sigma_{xx} dA, \quad T = \int_A \frac{E G_y}{G b} \tau_{yz} dA, \quad \bar{M}_{yy} = \int_A \bar{\tau}_{yz} y dA \\ \bar{K}_{yy} &= \int_A \frac{E}{G} \bar{\tau}_{yz} B_y dA, \quad \bar{M}_{xy} = \int_A \bar{\sigma}_{xx} y dA, \quad \bar{K}_{xy} = \int_A \frac{E}{G} B_y \bar{\sigma}_{xx} dA \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\tau}_{yz}$ は材端表面力であり、 M, N は通常の曲げモーメントと軸力である。

4. 解法 式(20)の $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\tau}_{yz}$ に $\bar{\sigma}_{xx} = E \epsilon_{xx}$ および $\bar{\tau}_{yz} = G \gamma_{yz}$ を代入すると断面力・変位関係式が得られる。これらと式(18)の第1, 第2式から N を消去したものと第3式を並記すれば

$$\frac{d}{d\xi} \begin{Bmatrix} M \\ \alpha \\ H \\ V \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_i \cos \alpha - \bar{N}_i \sin \alpha \\ -E_1 M + E_\alpha H \\ -E_1 V \\ E_\alpha M - E_\beta H \end{Bmatrix} \quad (21)$$

を得る。ここで $\xi = x/L$ であり

$$E_\beta = \frac{1}{\frac{E_\alpha R}{E I L^4} - \left(\frac{E_2 D}{E I L^2} \right)^2}, \quad E_\alpha = E_\beta \frac{E_2 D}{E I L^2}, \quad E_\gamma = E_\beta \frac{E_\alpha R}{E I L^4}, \quad E_1 = \frac{E_2 F}{E I L^2} \quad (22)$$

$$\text{さらにここで } E_2 = \frac{E}{G}, \quad E_{yy} = \frac{E^2}{G^2} \text{ および } D = \int_A B_y y dA, \quad R = \int_A B_y^2 dA, \quad F = \int_A \frac{G_y^2}{b^2} dA \quad (23)$$

である。式(21)の断面力は、 $M \sim M L / E I, V \sim L^2 V, H \sim H / E I L, \bar{Q}_i \sim \bar{Q}_i L^2 / E I, \bar{N}_i \sim \bar{N}_i L^2 / E I$ 又は部材長である。式(21)は逐次近似法を用いれば簡単に解かれる。