

東洋技研コンサルタント 正員 島田 昭
大阪工業大学 正員 岡村 宏一
大阪市立大学 正員 園田 康一郎

1. まえがき: 未知量を境界上のみに選ぶ境界積分法は、有限要素法や差分法のような領域型の解法に比べ、方程式の数を大幅に減少しうる長所を有している。この長所は、三次元問題でより顕著になり、また、領域型の解法では不適当な無限領域を含む問題の解析にも適している。集中力を受ける三次元体の解析解として、無限体の場合のKelvin解、および半無限体の場合のMindlin解⁽¹⁾はよく知られており、また、これらの代数的で与えられるため積分法の基本解として利用される。ところで、積分法の基本解として、解析領域の境界条件を一部のみで満足しているものを用いるならば、境界上での条件を課する範囲をさらに減少することとでき、解析精度の向上もはからず、より望ましいものとなう。たとえば、図-1(a)のような厚板の問題の場合には、Kelvin解よりも、すでに表面荷重を含む一つの境界面の条件を満足しているMindlin解を用いる方が便利である。また、図-1(b)のような角柱の場合には、さらに多くの境界面を満足する解を用いることが好ましい。ここでは、Kelvin解、Mindlin解に相当する解析解の種類と、これらの解を基本解として用いた場合の計算例について報告する。

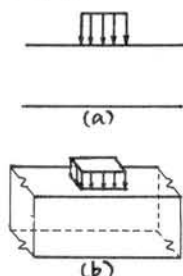


図-1

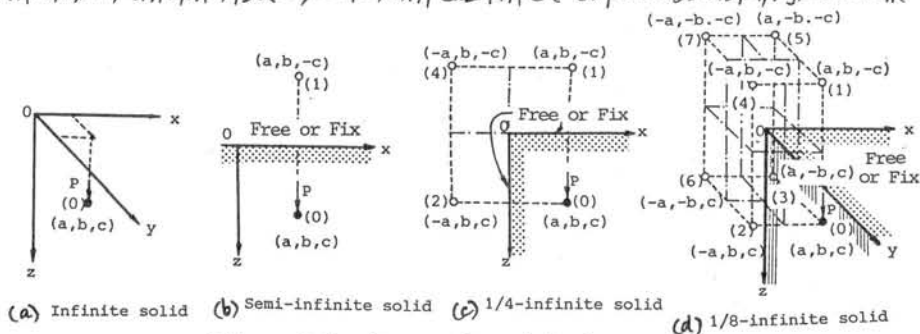


図-2 内部に集中力を受ける無限体

2. 基本解として用いられる種々な解析解: 筆者は、表-1に示す三次元弾性の基礎式を用い、図-2に示す4種類の無限体の解析解を系統的に求めた。ここに、表-1の各Typeは、図-3に示す3つのTypeの境界面を持つ三次元体に対応して適応されるものである。集中力を受ける無限体の解は、力の作用点で特異点を有し無限遠で零となるが、表-1の基礎式では、その最も簡単な解は、Type Iの場合次のように表わされる。

Free $\lambda\phi + 2G\psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\phi + 2G\psi) = 0,$ $\frac{\partial}{\partial z}\Omega = 0$	Free $\lambda\phi + 2G\psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\phi + 2G\psi) = 0,$ $\frac{\partial}{\partial z}\Omega = 0$	Free $\lambda\phi + 2G\psi = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\phi + 2G\psi) = 0,$ $\frac{\partial}{\partial y}\Omega = 0$
Fix $\phi = 0, \quad \int \psi dx = 0, \quad \Omega = 0$	Fix $\phi = 0, \quad \int \psi dx = 0, \quad \Omega = 0$	Fix $\phi = 0, \quad \int \psi dy = 0, \quad \Omega = 0$

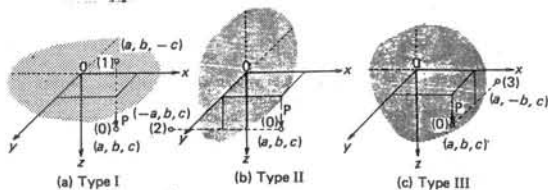


図-3 境界面のTypeと境界条件式

表-1 Fundamental equations and the corresponding displacement forms

Type	Function	Fundamental Equation	Displacement
I	$\Phi = \epsilon$	$\Delta^2 \Phi = 0$	$u = -\iint \left\{ \frac{(\lambda+2G)}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right\} dx dz$
	$\psi = \frac{\partial w}{\partial z}$	$\Delta^2 \psi + \frac{\lambda+G}{G} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$	$v = -\iint \left\{ \frac{(\lambda+2G)}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right\} dx dz$
	$\Omega = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$	$\Delta^2 \Omega = 0$	$w = \int \psi dz$
II	$\Phi = \epsilon$	$\Delta^2 \Phi = 0$	$u = \int \psi dx$
	$\psi = \frac{\partial w}{\partial x}$	$\Delta^2 \psi + \frac{\lambda+G}{G} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$	$v = -\iint \left\{ \frac{(\lambda+2G)}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right\} dx dz$
	$\Omega = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x}$	$\Delta^2 \Omega = 0$	$w = -\iint \left\{ \frac{(\lambda+2G)}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right\} dx dz$
III	$\Phi = \epsilon$	$\Delta^2 \Phi = 0$	$u = -\iint \left\{ \frac{(\lambda+2G)}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right\} dy dz$
	$\psi = \frac{\partial w}{\partial y}$	$\Delta^2 \psi + \frac{\lambda+G}{G} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$	$v = \int \psi dy$
	$\Omega = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$	$\Delta^2 \Omega = 0$	$w = -\iint \left\{ \frac{(\lambda+2G)}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right\} dy dz$

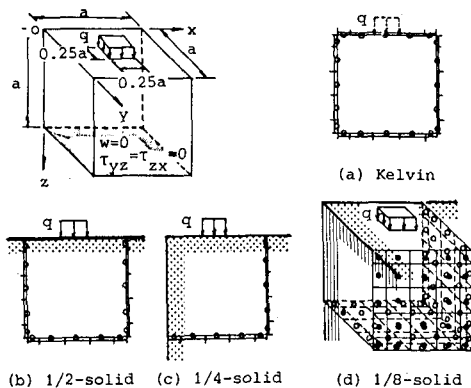
$$\Phi = \frac{A}{r}, \quad \psi = \frac{B}{r} - \frac{\lambda + G}{2G} A \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}, \quad \Omega = \frac{C}{r} \quad \text{----- (1)}$$

こゝに、 A, B, C は積分定数、 $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$ で (x_0, y_0, z_0) は特異点を示す。

図-2(a), (b)の場合は、岡村のKelvin解、およびMindlin解で与えられるが、表-1および式(1)を2で微分した型の解で容易に導くことができる。1つの境界面を持つMindlin解は、荷重点(0)にKelvin解を与え、境界条件を満足させるため、点(0)の境界面に対する鏡像点(1)(実領域外)に数種類の無限体のひずみ核を重ね合わせて得られる¹⁾。図-2(c)は、さらに直交する境界面を有する1/4-無限体の場合であるが、同図(b)のMindlin解を基礎解とするならば、点(0), (1)のもう1つの境界面($x=0$)に対する鏡像点(2), (4)(実領域外)に、表-1, Type II から求める数種類のひずみ核を重ね合わせ、図-3 Type II に示した境界条件を満足させることにより解が得られる。同様な手法を進めると、図-2(c)に示す3つの境界面を持つ1/8-無限体の解も求めることができる。すなわち、点(0), (1), (2), (4)の $y=0$ 面に対する鏡像点(3), (5), (6), (7)(実領域外)に、表-1のType II で与えられる数種類のひずみ核を重ね合わせることになる。なお、このようにして得られた解は、1つの型の特異性を持つひずみ解の微分形で与えられ、半無限体の解はもちろん、1/4-, 1/8-無限体の解もKelvin解と同じように、境界積分法の基本解として利用できる。

3. 計算例: 2で示した4種類の解析解を基本解として、杖地力を受ける矩形棒を境界積分法によって解析した。図-4は、各基本解を用いた場合の上半分の境界要素の分割メッシュを示したもので、表面の自由境界、および下面の対象条件は各要素の中心に1つた選点において満足させる。なお、要素解としては、各分割メッシュ上に単位力を積分して解を用いた。表-2には、基本解の種類と連立方程式の元数の関係を示した。図-5~7は、解析結果を示したものであるが、Kelvin解によるものを除いて、ほぼ一致した結果となっており、境界面の条件、特に荷重を含む面の条件を一部でも

満足するような基本解を用いることにより、解析精度を向上しうる。このほか、溝掘時には、他の結果もあわせて報告する。



(b) 1/2-solid (c) 1/4-solid (d) 1/8-solid

図-4 Example problem and mesh division

表-2

Number of unknowns (n) in simultaneous linear equation

	n
Kelvin	450
1/2-solid	375
1/4- "	300
1/8- "	225

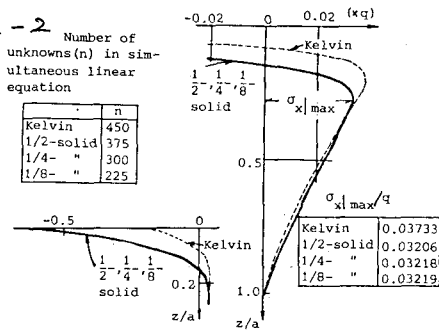


図-5

Variations of $\sigma_x|_{x=y=0.5a}$

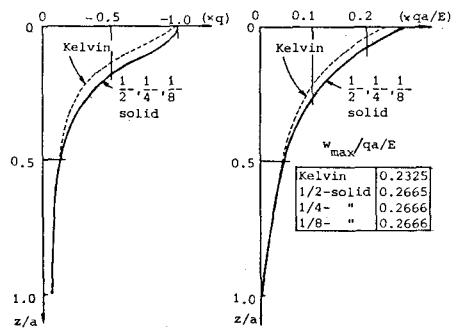


図-6

Variations of $\sigma_z|_{x=y=0.5a}$

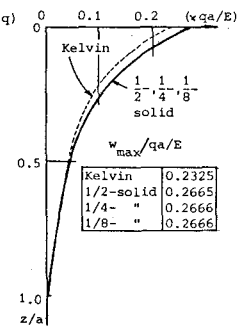


図-7

Variations of $w|_{x=y=0.5a}$

- 1) Mindlin, R.D.: Force at a point in the interior of a semi-infinite solid, Physics, Vol.7 (1936).
- 2) 岡村, 島田: 3次元弾性問題の数値解法とその応用, 土木学会論文報告集, No.199 (1972).
- 3) 島田, 岡村: 厚いスラブの応力と変形, 土木学会論文報告集, No.233 (1975).
- 4) Shimada, I., Okamura, H. and Sonoda, K.: Elastic solution of a 1/4- or 1/8-infinite solid with a force at a point in its interior, Memoirs of Engr., Osaka City University, Vol.22 (1981).
- 5) Shimada, I., Okamura, H., and Sonoda, K.: Some kinds of fundamental solutions applicable to Boundary Element Methods for three dimensional elastic problems, An International Conference on FEM, Shanghai, China (1982).