I-141　平面弾性問題における隅角部の解の特異性に関する考察

福井大学　大学院　学生員　○登　悦男
福井大学　工学部　正　員　福井　卓雄

1．まえがき

積分方程式法を解析に用いる場合，隅角部において，解が十分近似されずに発散してしまうことがしばしばある。本研究では静弾性学における二次元の境界値問題について，この特異性の問題をとりあげ，その発生原因を考察し，特異性に対する認識を深める。

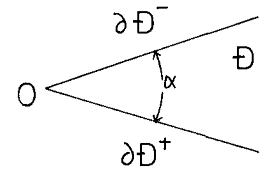
2．隅角部近傍の解の特異性

隅角部付近において，解（応力）に，次のように特異性が発生することが知られている。[1)]（Fig.1参）

（1）．境界 $\partial D^+, \partial D^-$ において双方とも固定あるいは自由の場合（第一種，第二種境界値問題），$\alpha > \pi$ で特異性が発生する。

（2）．一方が固定，他方が自由の場合（混合境界値問題），$\alpha \gtrsim 53°$ で特異性が発生する。

いずれの場合も，応力が隅角点で無限大（$r^{\lambda-1}$, $0<\lambda<1$ の項がついているので）となる程度の特異性である。なお，この場合の ν は（ポアソン比）0.3 としている。



Fig．1

3．近似解の特異性

領域内の変位 $u_i(x)$ を境界上に分布する密度 $\varphi_j(y)$ による一重層ポテンシャルで，次式のように表わす。

$$u_i(x) = \int_{\partial D} G_{ij}(x;y)\,\varphi_j(y)\,ds_y \qquad (1)$$

ここに $G_{ij}(x;y)$ は弾性学の基本特異解であり，次式で表わせる。

$$G_{ij}(x;y) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\delta_{ij}\log\frac{1}{r} + r_{,i}r_{,j}\right] \qquad (2)$$

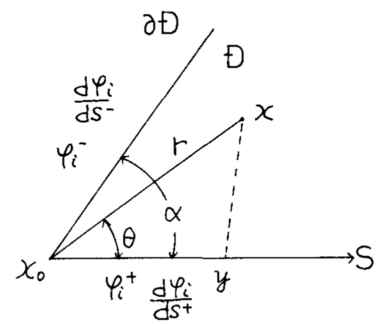
ここで μ はせん断弾性定数，δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

次に，密度を隅角付近で Taylor 展開して

$$\varphi_i(y) = \varphi_i^{\pm}(x_0) + (S(y)-S(x_0))\frac{d\varphi_i}{dS^{\pm}} + \cdots \qquad (3)$$

とし，それぞれの項に対応する一重層ポテンシャルを

$$u_i(x) = u_i^{(0)}(x) + u_i^{(1)}(x) + u_i^{(2)}(x) + \cdots\cdots \qquad (4)$$



Fig．2

とする（Fig.2）。今，$u_i(x)$ について $i=1$ のときを考え（$i=2$ のときも同様である。），$u_1^{(0)}$, $u_1^{(1)}$ について隅角部の特異性に関する項について整理すると，次のようになる。

$$u_1^{(0)} = Br\log r\left[\sin\theta\,\varphi_n^+ - (\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta)\varphi_n^- - (3-4\nu)\left\{\cos\theta\,\varphi_t^+ + (\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta)\varphi_t^-\right\}\right] \qquad (5)$$

$$u_1^{(1)} = \frac{B}{2}r^2\log r\left[(3-4\nu)\left\{\cos^2(\alpha-\theta)\frac{d\varphi_t}{ds^+} - \cos^2\theta\frac{d\varphi_t}{ds^-}\right\} + (5-4\nu)\left\{\sin^2(\alpha-\theta)\frac{d\varphi_t}{ds^+} - \sin^2\theta\frac{d\varphi_t}{ds^-}\right\}\right] \qquad (6)$$

注.）添字 t は接線方向，n は法線方向の成分であることを示す。

ここに $B = 1/8\pi\mu(1-\nu)$ であり，$\varepsilon(r)$, $\varepsilon(r^2)$ はそれぞれ r, r^2 の程度の関数である。したがって，近似解の特異性は $u_i(x)$ の勾配が無限大（$\log r$ の項がつく）となる程度のものであり，$\varphi_i(y)$ の値によって

決まることがわかる。特異性が消えるのは、$\varphi_t^+ = \varphi_n^+ = 0$，または、$\varphi_t^+ = \varphi_t^-$，$\varphi_n^+ = \varphi_n^-$ で $\alpha = \pi$ のときだけである。

4. 考 察

2.3.の結果より、実際の解の特異性と近似解の特異性とは、元来、性質が異なることがわかった。しかし隅角部を除けば、双方とも、似たような挙動を示すので問題はない。今までは、実際の解に特異性があるような隅角の場合は、近似解の特異性で十分近似できるものと考えていたが、特異性の性質が異なることを考慮して何らかの処置を施すべきである。また、実際の解に特異性のないような隅角の場合は、近似解の特異性を、回避してやる必要がある。一般に、解の精度がさがるのは、境界要素接点における近似解の不連続性が原因であると考えられる。これは、高次関数近似を導入しても、各境界要素ごとに近似するという積分方程式法の性質上、本質的には解決できない問題ではあるが、実際問題としての解の精度は、隅角部を除けば十分なものであることは周知のとおりである。隅角部における特異性も、この不連続性がひとつの原因であると考えられる。隅角部の問題の根本的な解決法は、したがって、実際の解の性質と同じ性質を示す近似解を選ぶこと，となる。実際の解析を行なう場合には、今までの議論を考慮すると、次のような方法が有効であろうと考えられる。境界の近似は、実際の問題になるべく忠実に行なう。境界が曲線であるような場合、通常用いられる直線近似を行なうと、自ら隅角部をつくりだすことになり、解の精度に影響するからである。密度は、一重層ポテンシャルの性質や、連続性を考えると、少なくとも線形で近似すべきである。が、あまり高次の近似を用いても、期待するほど解の精度もあがらないばかりか、かえって計算時間が長くなって不経済である。むしろ、近似は簡単な方法で行なって、隅角部での特異性を回避することに努めたほうが、より高い精度の解が得られるであろう。したがって、一般の境界では、さきに述べた近似を行ない、隅角部での特異性にかかわりのある境界要素についてのみ、適当な処置を行なうのが今のところ最善であろうと考えられる。また、特異性は密度の値によって決まるものであるから、この点をふまえた手法である必要がある。

5. 解析例

特異性解消法の一例として、隅角部において境界要素を、領域外に延長させてやる方法（はみだし法）[2] を用いた、一様な引張力をうける長方形板の問題の解析結果をFig.3に示す。ここでは、はみだし法の効果を確かめるのが目的であるから、密度は階段関数近似，境界は直線で近似し、結果は隅角附近についてのみ示してある。はみだし法を用いることによって、特異性の内部への影響が、おさえられているのがよくわかる。線形近似を行なえば、さらに良い結果が得られるであろう。

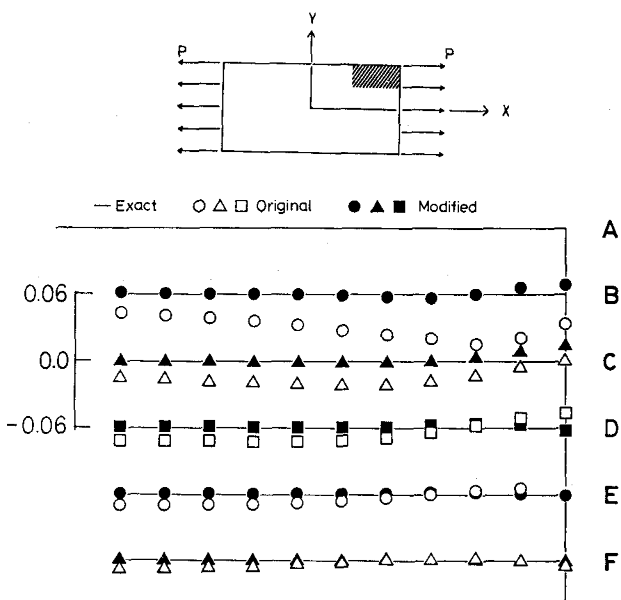


Fig. 3 stress

参考文献
1.) Little,R.W., Elasticity, Prentice-Hall Englewood Ciffs, (1973)
2.) 福井卓雄，土木学会第38回年次学術講演概要集 第1部，PP 17–18，(1981)