

福井大学大学院 学生員 岩佐 晃男
福井大学工学部 正員 福井 卓雄

1. はじめに

積分方程式法の問題点は、隅角部での特異性などのように回避するかということである。それにはまず、隅角部での実際の解の性質と、積分方程式により求めた近似解の性質とが、どのようにちがうのかを検討した上で、積分方程式により求めた近似解の性質を、実際の解の性質に少しでも近づけるようにすることが必要である。ここでは、平板問題について考察を進める。

2. 隅角部での平板問題の解の特性

隅角部における重調和関数の解の特性を知るために、図1のような角のあるくさび形領域を考える。隅角部付近のたわみ w は、次式で与えられる。

$$w = r^\lambda [A \sin \lambda \theta + B \cos \lambda \theta + C \sin (\lambda-2)\theta + D \cos (\lambda-2)\theta] \quad (1)$$

たとえば、固定の場合の境界条件は、 $\theta=0, \alpha$ で

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

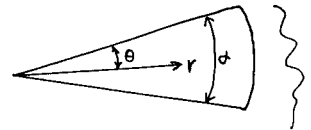


図.1

である。境界条件のもとで、式(1)が $A=B=C=D=0$ 以外の解を持つためには、

$$\sin (\lambda-1)\alpha = \pm \frac{\sin \alpha}{\alpha} (\lambda-1)\alpha \quad (3)$$

を満たさなければならない。式(3)は、 α を固定するとき λ を未知数とする超越方程式であり、一般には無限個の根を持つ。図2は、 α と最小の根 λ の関係をプロットしたものである。

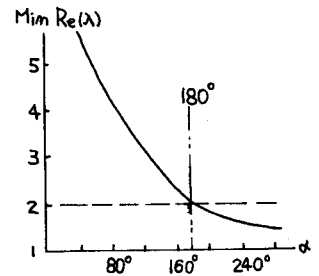


図.2

ところで、モーメントは、 w の2階微分であるから、 $r^{(\lambda-2)}$ の項をふくんでいる。すなわち式(1)で λ が2よりも小さいと特異性を持つ。図2より、固定された隅角部付近では、 $\alpha \leq \pi$ のとき、 $\lambda \geq 2$ となり、モーメントは連続である。

同様にして、単独支持された隅角部付近を考えると、 $\alpha \leq \pi/2$ または、 $\alpha = \pi$ のとき、 $\lambda \geq 2$ となり、モーメントは連続である。

3. 隅角部付近での積分方程式法による近似解の特性

いま、無限板において、領域 B の境界 ∂B 上に荷重分布 $\sigma(y)$ および支線方向のモーメント分布 $\tau(y)$ を考えると、たわみの一般解は、次式で与えられる。

$$w(x) = \int_{\partial B} \{ \Gamma(x; y) \sigma(y) + H(x; y) \tau(y) \} ds_y \quad (4)$$

ここで、 $\Gamma(x; y) = \frac{1}{8\pi D} r^2 (\log r - 1)$, $H(x; y) = -\frac{1}{4\pi D} (x l_1 + y l_2) (\log r - \frac{1}{2})$
(ただし、 l は単位法線ベクトル)

である。式(4)の隅角部付近の挙動について調べてみよう。まず、密度 $\sigma(y)$ と $\tau(y)$ を隅角部付近で Taylor 展開して、

$$\begin{aligned} \sigma(y) &= \sigma^+(x_0) + \left\{ S(y) - S(x_0) \right\} \frac{d\sigma}{ds} + \dots \\ \tau(y) &= \tau^+(x_0) + \left\{ T(y) - T(x_0) \right\} \frac{dT}{ds} + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

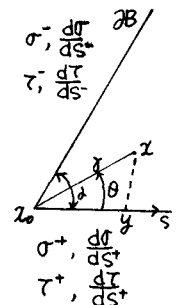


図.3

とし、それぞれの項に対応する一重層ポテンシャルを

$$W(x) = \{W_0(x) + W_0'(x)\} + \{W_1(x) + W_1'\} + \dots \quad (6)$$

とする。式(6)の特異性を含む項だけについて整理すると、

$$\begin{aligned} W_0(x) &= -\frac{1}{3}r^3 \log r \left\{ \sigma^- \cos(\theta-\theta) (\cos 2(\theta-\theta) + 4) + \sigma^+ \cos \theta (\cos 2\theta + 4) \right\} + \varepsilon(r^3), \quad \varepsilon(r^3) \sim r^3 \\ W_0'(x) &= \frac{1}{2}r^2 \log r \left\{ \tau^- \sin 2(\theta-\theta) + \tau^+ \sin 2\theta \right\} + \varepsilon(r^2), \quad \varepsilon(r^2) \sim r^2 \\ W_1(x) &= -\frac{1}{32}r^4 \log r \left\{ \frac{d\sigma^-}{ds} (\cos 4(\theta-\theta) + 7) - \frac{d\sigma^+}{ds} (\cos 4\theta + 7) \right\} + \varepsilon(r^4), \quad \varepsilon(r^4) \sim r^4 \\ W_1'(x) &= -\frac{1}{2}r^3 \log r \left\{ \frac{d\tau^-}{ds} \sin(\theta-\theta) - \frac{d\tau^+}{ds} \sin \theta \right\} + \varepsilon(r^3), \quad \varepsilon(r^3) \sim r^3 \end{aligned} \quad (7)$$

となる。式(7)より、たゞし $W_0'(x)$ については、モーメントは $\log r$ の程度の特異性をもつ。また、この特異性は隅角部における密度の値によって決まる。特異性が消えるのは、特殊な場合、即ち (1) $\tau^- = \tau^+ = 0$ 、

(2) $\alpha = \pi/2$ または $\frac{3}{2}\pi$ かつ $\tau^- = -\tau^+$ 、または、(3) $\alpha = \pi$ かつ $\tau^- = \tau^+$ の時である。(図、3)

4. 解の精度向上に関する考察

3の結果より式(4)で表わされる解は、隅角付近で特異性を有するのが普通であり、その特性は隅角の幾何学的形状と密度の値に関係している。したがって、解の精度を向上させるためには、全体の密度分布を高次の関数で近似することよりも、むしろ隅角付近での解の正確な値を内部に及ぼさないようにするが、または、それを消去してしまふことが必要である。隅角部での密度分布の近似法を考える。方針としては、積分方程式の解が隅角付近で実際の解に似た性質を持つたせることである。実際の解に特異性が生じない場合には、積分方程式の値が板の角を急激にしないようにする。たとえば、密度分布を領域外へ少し延長する方法などがある。¹⁾ また、実際の解に特異性がある場合においても、式(1)と式(7)からわかるように、この特異性は、積分方程式に生じる特異性とは性質のちがうものである。したがって、何らかの方法で密度の近似を行う必要がある。たとえば積分区間を隅角点の一步手前で止めることなどが考えられる。

5. 解析例

ここでは、隅角部で実際の解に特異性が生じない場合として、長方形板の解析例を示す。

密度は区間一定とする。隅角部での特異性を回避するために、隅角部での積分区間を領域外へ少し延長させ、付加条件互角の部分におけるたわみの接線方向の勾配の平均値が 0 となるように与える。表 1 からわかるように、何も手を加えない場合 (Original) と比べ、隅角部での操作を行った場合 (Modified)、明らかに解の精度の向上が見られる。

表 1

Bending moments of a uniformly loaded rectangular plate with simply supported edges.

M_{xx}, M_{yy} ($\times 10^{-2} \text{ pa}^2$) Exact Original
Modified

Diagram of a rectangular plate with dimensions a and b . The plate is divided into four regions by dashed lines at $x/a = 0.52$ and $y/a = 0.88$. The regions are labeled with their dimensions: $0.52a$, $0.88a$, $0.88b$, and $0.52b$. The aspect ratio $b/a = 20$ and the Poisson's ratio $\nu = 0.3$ are also indicated.

y/a	x/a	0.20	0.26	0.32	0.38	0.44	0.50
M_{xx}							
1.00			0.0	0.174		0.0	-3.561
				-0.144			-0.767
0.88	2.311	2.314	2.080	2.121	1.768	1.711	1.352
		2.308		2.109		1.839	
0.76			3.728	3.675			
				3.748			
0.64			4.992	4.946			
				5.006			
0.52	6.748	6.717	5.938	5.906	4.884	4.853	3.562
		6.756		5.947		4.892	
0.40			6.625	6.601			
				6.632			