I-139 積分方程式法の数値解の特性とその近似解法に関する一考察

福井大学工学部 正員 福井卓雄

はじめに

一般に，積分方程式法（または，境界要素法）の数値解の精度は良いことが知られている。この理由は，解を本来与えられた場の方程式を満足する解の重ね合わせとして表現していることによる。従って，数値解析上は境界付近の解の近似が一番問題になる．本報告では，いわゆる indirect method の数値近似解の特性について検討し，数値解の近似精度を高める方法について基礎的な考察を行う。

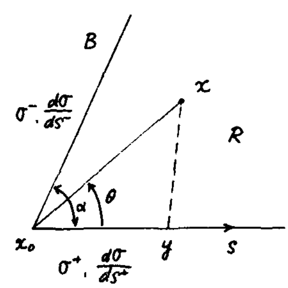
数値解を得ようとする場合，未知関数を有限の自由度をもつ近似関数で表わす訳であるが，通常はこの近似関数で表現できる範囲に限界がある。特に，積分方程式法の場合には，未知関数の近似を行なうと同時に未知関数の空間的分布の幾何学的形状までも近似する必要がある。さらに，どのような未知関数の近似を用いるにしてもそれによって表現される解の性質にもある限界があることにも注意すべきである。また，近似未知関数を決定する方法は，上記の解の表現上の制約に関連して選択されるべきである。近似関数の選択とその決定法の選択は，上記の制約の範囲内で問題の解の特性を必要な程度まで表現するという観点からなされなければならない。

密度の連続性，分布形状の連続性と解の連続性との関連

Laplace 境界値問題を一重層ポテンシャルを用いて解く場合について考えよう。問題を二次元に限定する。領域Rでの解 $u(x)$ を境界B上に分布した一重層密度 $\sigma(s)$ により

$$u(x)=\int_B \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-y|}\,\sigma(s(y))\,ds \qquad \text{in } R \qquad (1)$$

と表わす。 ここに，Sは境界に沿った長さを表わす。



図

図のような境界の一部について考える．点 x_0 で境界は接線方向が不連続であり，密度の分布もまた不連続であるとする。 点 x_0 付近でのポテンシャル $u(x)$ の様子をみるために，境界に沿って密度を Taylor 展開して

$$\sigma(y)=\sigma^{\pm}(x_0)+(s(y)-s(x_0))\frac{d\sigma}{ds^{\pm}}+\cdots \qquad \text{on } B \qquad (2)$$

と表わす。 このときの密度を上の各項に対応して

$$u(x)=u_0(x)+u_1(x)+\cdots \qquad \text{in } R \qquad (3)$$

とする。 点 x_0 での特異性を含んだ項だけについて示すと，

$$\begin{aligned} u_0(x)&=-\frac{1}{2\pi}r(\log r-1)\left[(\sigma^+ +\sigma^-\cos\alpha)\cos\theta-\sigma^-\sin\alpha\sin\theta\right]+\varepsilon(r), \quad \varepsilon(r)\sim r \\ u_1(x)&=-\frac{1}{4\pi}r^2\log r\left[\left(\frac{d\sigma}{ds^+}-\frac{d\sigma}{ds^-}\cos 2\alpha\right)\cos 2\theta+\frac{d\sigma}{ds^-}\sin 2\alpha\sin 2\theta\right]+\varepsilon(r^2), \quad \varepsilon(r^2)\sim r \end{aligned} \qquad (3a)$$

などとなる。 すなわち，一般的に

$$u_n(x)\in C^n(R) \qquad (C^n:\ n\text{階微分まで連続な関数を表わす})$$

である。 これらの特異性を含んだ項が消去される条件は，

u_0 について (1) $\sigma^+=\sigma^-=0$ ，(2) $\alpha=\pi$ ，$\sigma^+=\sigma^-$ ，(3) $\alpha=0,\ 2\pi$ ，$\sigma^+=-\sigma^-$

u_1 について (1) $\frac{d\sigma}{ds^+}=\frac{d\sigma}{ds^-}=0$ ，(2) $\alpha=0,\pi,2\pi$ ，$\frac{d\sigma}{ds^+}=\frac{d\sigma}{ds^-}$ ，(3) $\alpha=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ ，$\frac{d\sigma}{ds^+}=-\frac{d\sigma}{ds^-}$

となる。

解の近似法に関する考察

滑らかな境界上での密度関数の近似　滑らかな境界点の付近では，$\alpha=\pi$ であるから，式 (3a) は，

$$
\begin{aligned}
u_0(x) &= -\frac{1}{2\pi} r(\log r-1)(\sigma^+-\sigma^-)\cos\theta + \varepsilon(r) \\
u_1(x) &= -\frac{1}{4\pi} r^2 \log r \left(\frac{d\sigma}{ds^+}-\frac{d\sigma}{ds^-}\right)\cos 2\theta + \varepsilon(r^2)
\end{aligned}
\qquad (3b)
$$

などになる。すなわち，密度 σ の連続性とそれによるポテンシャル u の連続性との間には

$$\sigma \in C^n(B) \longrightarrow u \in C^n(R)$$

の関係がある。密度をSの巾多項式で近似するものとすれば，必要とする連続の程度に対応して近似関数の連続性を求める必要がある。特に注意すべきことは，有限要素法のように境界を分割して区分連続関数で近似する場合には，得られるポテンシャルの連続性は分割点での近似関数の連続の程度だけで決まるということである。従って，近似の仕方によっては，高次近似を採用することが必ずしも数値解の精度を上げることにはつながらない。この点を考えると，むしろ対象とする区間全体の連続性を自由に制御できる *spline* 近似のような近似法が適していると考えられる。

境界の近似　曲線境界を近似する場合に多辺形を用いることが簡便でもあり，よく用いられているが，(3a) からわかるように，このような境界の近似では密度をどのように滑らかに近似したとしても一般に α の特殊な値以外では隅角部で何らかの特異性を含むことになる。この影響は α が π に近ければ小さいものではあるが，そうするためには境界をかなり細かく分割しなければならなくなり，密度の近似を高める意味がなくなってしまう。取り扱いは複雑になるが，曲線要素を導入するか，または，要素の端点を領域 R の外部になるようにする（仮想境界法）等の方法が考えられる。

隅角部での近似解の挙動　式 (3a) より，隅角部でのポテンシャルは必然的に特異性を含んでいる。この特異性の性質は実際の解の隅角部での挙動とはまったくあい入れないものである。*direct method* の場合にはこの特異性は一重層と二重層の二つのポテンシャルの和としてある程度は相殺されて，隅角部から少し離れた位置にはあまり影響しなくなるものであるが，*indirect method* の場合には，かなり内部の点にまでこの影響が及んでしまう。従って，まったく別の何らかの方法で隅角部の付近を精度よく近似する工夫が必要であろう。[1]

近似解の決定法

上記のように，密度の近似法を適当に選ぶことによって，境界積分を用いて近似解の連続性を制御することができる。しかしながら，近似解を決定する方法は解の表現と関連はするが，また別のものである。境界積分方程式を近似的に解くために，最もよく用いられるのは選点法であろう。近似解の表現が境界付近で十分に滑らかであれば，この選点法が最も簡便であり，かつ十分な精度で近似解を得られる。しかし，境界付近で解が急変する場合や近似解の表現そのものが境界条件にうまく適合しない場合には，部分領域法や *Galerkin* 法のように何らかの意味で誤差を平均的に減少させる方法を導入する必要があるであろう。

おわりに

境界密度の連続性，境界の連続性とポテンシャルの連続性との関係に着目して積分方程式法の近似手法について考察を試みた。数値例等については当日に発表する。

参考文献

(1) 福井卓雄　土木学会第38回年次学術講演概要集　第I部，PP 17～18　(1981)