

近畿地建 正員 藤本 昭彦
森長組 西岡 幸輝
大阪工業大学 正員 岡村 宏一

1. はしがき 近年、大型構造物や異種材料からなる合成構造物が、多く用いられるようになってきた。このような構造物を解析する手法として、a) 応力法、b) 変位法および c) 混合法が挙げられる¹⁾。a), b) の方法によれば、分割要素数の増大に伴って未知量の数が多くなり、大型計算機の使用が不可欠なものとなる。一方、c) の方法としてはマイコン等の小容量の計算機に適する還元法があり、種々の改良が試みられている²⁾。また、この方法ははりやラーメン等の骨組構造物で広範に用いられているが、板やシェル等の二次元問題への適用例は少なく^{2), 3)}、三次元弾性体に至ってはほとんど見受けられないのが現状である。

本研究においては、全周単純支持された多層板を取扱い、①多層板の接合面に作用する応力や局所的な挙動を忠実に把握するために厚板理論を用いる。②倍精度計算が常識となっている従来の還元法は、単精度計算を前提とする現在のマイコンには不適當である。このような欠陥を改善するために「はさみ込み法」と名付ける手法を提案する。③2, 3の数値計算を行って「はさみ込み法」の妥当性を吟味し、三次元問題への拡張を試みる。

2. 基礎式 三次元弾性論における Galerkin-vector W , Boussinesq's function Θ および変位ベクトル U は、

$$\Delta \Delta W = -B/(1-\nu), \quad \Delta \Theta = 0 \quad \text{--- (1)}, \quad 2\mu U = 2(1-\nu)\Delta W - \text{grad div } W + 2\text{rot } \Theta \quad \text{--- (2)}$$

ここで、 $B = (X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k})$: 物体力ベクトル, ν : ポアソン比, μ : ラメの定数, $W = W_x\hat{i} + W_y\hat{j} + W_z\hat{k}$, $\Theta = \Theta_x\hat{i} + \Theta_y\hat{j} + \Theta_z\hat{k}$, grad, div および rot: ベクトル演算子, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: 単位ベクトル, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$.

全周単純支持された板に式(1)を適用すると、関数 W_z および Θ_z は次のようになる。

$$W_z = \sum_m \sum_n \left[C_1 \sinh \gamma z + C_2 \cosh \gamma z + C_3 \gamma \sinh \gamma z + C_4 \gamma \cosh \gamma z \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad \Theta_z = \sum_m \sum_n \left[C_5 \sinh \gamma z + C_6 \cosh \gamma z \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \quad \text{--- (3)}$$

ここで、 $\alpha_m = m\pi/a$, $\beta_n = n\pi/b$, $\gamma^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$, a および b は x および y 方向のスパン, $C_1 \sim C_6$ は板の上下面の境界条件より決定される未定定数である。なお、座標系は板の中央面に x - y 平面を、それと垂直下向きに z 軸をとる。

3. 多層板への適用

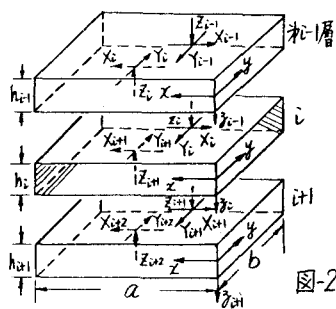
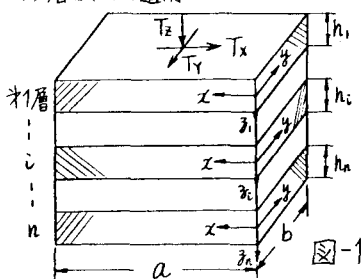


図-1に示される多層板の任意の層 i ははさむ層を取出して考える(図-2)。式(3)の関数をそれら各層に適用し、さらに調和解析を行えば、 i 層の上下面での変位、応力のフーリエ係数は以下のように関連づけられる。

$$\begin{Bmatrix} U_i^{(u)} \\ U_i^{(l)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i^{(u)} \\ K_i^{(l)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i^{(u)} \\ X_i^{(l)} \end{Bmatrix} \quad \text{--- (4)}$$

ここで、 $U_i^{(u)} = [U_i, V_i, W_i]^T$, $X_i^{(u)} = [X_i, Y_i, Z_i]^T$ である。

式(4)と i と $i-1$ 層の変位の連続条件式より、層間に作用する伝達力 X_i を未知量とする応力法に帰着する⁴⁾。

4. 「はさみ込み法」の概要 式(4)を還元法と同様の形式に変換し、接合面での状態ベクトルを Y_i とすると、

$$Y_i = \overline{F}_i Y_{i+1} \quad \text{--- (5)} \quad \text{ここで、} Y_i = [U_i, V_i, W_i, X_i, Y_i, Z_i]^T, \quad \overline{F}_i: \text{格間マトリックスである。}$$

また、同様にして式(4)は次のようにも変形できる。

$$Y_{i+1} = \overline{G}_i Y_i \quad \text{--- (6)} \quad \text{ここで、} \overline{G}_i = (\overline{F}_i)^{-1} \text{ である。}$$

式(5), (6)を図-3を参照して、 n 層からなる多層板に適用すると、

i 層目の接合面での状態ベクトル Y_i は、次のように示される。

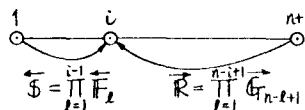


図-3 「はさみ込み法」の模式図

$$\begin{pmatrix} U \\ X \\ 1 \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \overleftarrow{S} \\ \overleftarrow{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U \\ X \\ 1 \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \overleftarrow{\alpha}_{11}, \overleftarrow{\alpha}_{12}, \overleftarrow{\gamma}_1 \\ \overleftarrow{\alpha}_{21}, \overleftarrow{\alpha}_{22}, \overleftarrow{\gamma}_2 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ X \\ 1 \end{pmatrix}_i \quad (7) \quad \begin{pmatrix} U \\ X \\ 1 \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U \\ X \\ 1 \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\alpha}_{11}, \overrightarrow{\alpha}_{12}, \overrightarrow{\gamma}_1 \\ \overrightarrow{\alpha}_{21}, \overrightarrow{\alpha}_{22}, \overrightarrow{\gamma}_2 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ X \\ 1 \end{pmatrix}_i \quad (8)$$

∴ $U_i = [U_i, V_i, W_i]^T$, $X_i = [X_i, Y_i, Z_i]^T$, $\overleftarrow{\gamma}_1, \dots, \overleftarrow{\gamma}_2$: 物体力による影響項である。

多層板の上下面の外荷重 X_1, X_{n+1} が既知の場合、式(7), (8)より状態ベクトル U_i は式(9)のように得られる。

$$\begin{pmatrix} U \\ X \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \overleftarrow{\alpha}_{21} & \overleftarrow{\alpha}_{22} \\ \overleftarrow{\alpha}_{21} & \overleftarrow{\alpha}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X_1 - \overleftarrow{\gamma}_2 \\ X_{n+1} - \overleftarrow{\gamma}_2 \end{pmatrix} \quad (9) \quad \text{フーリエ級数の各項ごとに多層板の接合面での変位, 伝達力が容易に求められ, それらを総和すればよいことになる。}$$

5. 数値計算例 6層からなる多層板の上面に等分布荷重 q 、あるいは板厚の下半分に等分布物体力 $\bar{z}$ が作用している場合の2ケースについて板中央点 ($x/a = y/b = 0.5$) での $m(n) = 90$ 項まで総和した結果を表-1, 2に示す。

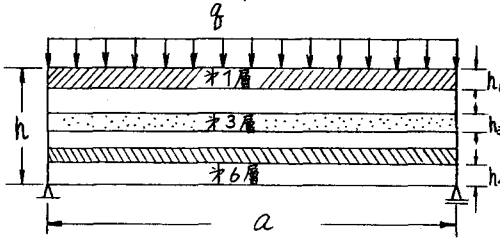


表-1 応力 σ_x およびたわみ W の比較 (等分布荷重)

項目 層番号	σ_x / q				$W \cdot 2\mu_0 / qa$			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	-7.438	-7.438	-7.438	-7.438	6.417	6.418	6.421	6.421
	-4.887	-4.894	-4.893	-4.893	6.508	6.508	6.509	6.509
3	-0.982	-2.452	-2.453	-2.453	6.519	6.553	6.551	6.551
	5.1×10^2	-0.075	-0.075	-0.075	-3.500	6.557	6.556	6.556
6	1.0×10^8	4.744	4.746	4.746	-1.6×10^6	6.466	6.447	6.447
	4.3×10^{10}	7.313	7.313	7.313	-6.5×10^8	6.325	6.326	6.326

表-2 応力 σ_x およびたわみ W の比較 (物体力)

項目 層番号	$\sigma_x / \bar{z}$			$W \cdot 2\mu_0 / \bar{z}a$		
	2	3	4	2	3	4
1	-6.305	-3.690	-3.690	3.195	3.235	3.235
	-2.530	-2.385	-2.385	3.295	3.300	3.300
3	-1.145	-1.140	-1.140	3.335	3.335	3.335
	0.070	0.070	0.070	3.355	3.350	3.350
6	2.385	2.385	2.385	3.315	3.315	3.315
	3.615	3.615	3.610	3.260	3.260	3.260

表中の各枠の上段は層の上面, 下段は下面での値を示す。

6. あとがき 「はさみ込み法」の精度は、十分良い結果を示している。「はさみ込み法」の唯一の欠点としては、層数が多くなれば行列演算の回数が相当多くなり計算時間が増大することである。ちなみに、応力法と「はさみ込み法」の計算時間を比較すれば、約10層位で前者の方が時間を要しており、外荷重の級数展開の項数に比例して両者の差は増幅するものと思われる。本方法は、3次元弾性体といえどもマイコン等の小型計算機でも十分威力を発揮できると思われる。

本研究の計算に際して、大阪市立大学土木工学科 堀川都志雄助手の協力を得たことを付記する。

1) 倉田, 岡村, 谷平: 構造力学Ⅱ, 明現社。 2) 中村秀治: 数値誤差の改善を考慮した伝達マトリックス法の提案, 土木学会論文報告集, 第289号, 1979年9月。 3) 山口他: 多主桁高架橋に対する伝達マトリックス級数解法について, 関西支部講演会, 昭和55年。 4) K. Hirose et al.: Three dimensional elastic analysis of a steel and concrete sandwich plate, Memo. Osaka City University, Vol. 20, 1979。