

名古屋工業大学 学生員 ○大塚 利弘
名古屋工業大学 正員 長谷部 寛男

まえがき 弾性体中に存在する線状変位拘束部の一端よりき裂が発生した状態の応力解析を、境界上で変位が与えられる部分と、外力が与えられる部分とからなる平面弾性混合境界値問題として行なう。解法として、有理型の、分数的和の等角写像、および複素応力関数を用いる。本報告では、無限遠で一様引張力をうける場合の、応力分布やき裂先端の応力拡大係数を、3つのき裂方向に対し、き裂長を変化させながら求める。

解法 図-2に示すように物理領域を写像面の単位円外部に写像する関数を次式の形に表わす。

$$Z = \omega(\zeta) = A \zeta^{\lambda_1} (\zeta - e^{i\alpha_1})^{\lambda_2} (\zeta - e^{i\alpha_2})^{\lambda_2} \\ = A \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + \text{const} \quad (1)$$

ここで、 A は実定数、 α_k は $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi$ を満足する定数で、 $\zeta = e^{i\alpha_k}$ はき裂の屈折部に対応する。また、 $\lambda_1 = 1 - \theta/\pi$ 、 $\lambda_2 = 1 + \theta/\pi$ である。

複素応力関数を用いて、応力成分を表わすと次のようになる。

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \left\{ \varphi'(\zeta) / \omega'(\zeta) \right\} \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left\{ \overline{\omega(\zeta)} \left[\varphi'(\zeta) / \omega'(\zeta) \right]' + \psi'(\zeta) \right\} / \omega'(\zeta) \quad (2)$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = e^{2i\beta} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})$$

ここで、 $\operatorname{Re}[\]$ は実部を表わす。 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ は応力成分の極座標表示であり、 $e^{2i\beta} = \zeta^2 \omega'(\zeta) / [1 \pm \overline{\omega(\zeta)}]$ である。同様に、複素応力関数を用いて、変位成分を表わすと次のようになる。

$$2G(u + iv) = \kappa \varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)}, \quad u_r + iv_\theta = e^{i\beta} (u + iv) \quad (3)$$

ここで、 G はせん断弾性係数で、 κ はポアソン比を ν とすると、 $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ (平面応力)、 $\kappa = 3 - 4\nu$ (平面ひずみ)である。

式(1)に対する複素応力関数の一般解は、次式で表わされる。

$$\varphi(\zeta) = -\chi(\zeta) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_k B_k}{X(\zeta_k) (\zeta_k - \zeta)} + H(\zeta) \quad (4)$$

ここで、 $\chi(\zeta)$ はPlemelj関数、 $H(\zeta)$ は境界条件によって決まる関数である。

図-1のように無限遠で一様引張力が作用し、斜線部分で x, y 方向の変位成分 $u = v = 0$ 、その他の境界で応力自由としたとき、求めたい応力関数を、 $\varphi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + \varphi_1(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta) = \psi_0(\zeta) + \psi_1(\zeta)$ ($\varphi_0(\zeta)$ 、 $\psi_0(\zeta)$ は大きさ P の一様引張を表わす応力関数)とすると、 $\varphi_1(\zeta)$ が式(4)の形で与えられ、 $H(\zeta)$ は次のようになる。

$$H(\zeta) = -\frac{P}{4} \omega(\zeta) - \frac{P}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} - \frac{P}{2} A \frac{\chi(\zeta)}{\chi(0)} \frac{1}{\zeta} + \frac{P}{4} A \chi(\zeta) \quad (5)$$

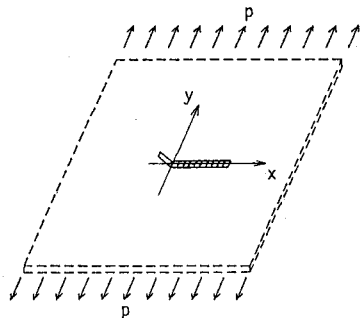


図-1 解析モデル

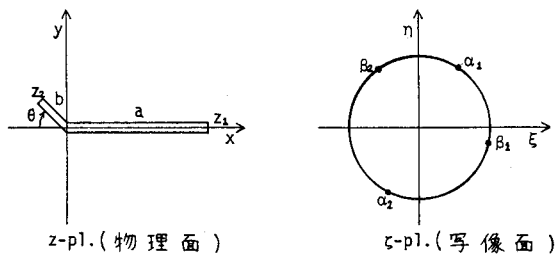


図-2 対象形状とその写像形

$\varphi(z)$ が求まれば $\psi(z)$ は、解析接続の原理より、 $\psi(z) = -\overline{\varphi}(1/\bar{z}) - \overline{\omega}(1/\bar{z}) \cdot \varphi(z) / \omega'(z)$ と求まる。

解析結果 図-3 に $\kappa = 2$ (ポアソン比が平面応力で $1/3$, 平面ひずみで $1/4$), $b/a = 0.200$ に対する応力分布を示す。剛境界上の応力 σ_r と σ_θ の間には、 $\sigma_\theta / \sigma_r = (3 - \kappa) / (1 + \kappa)$ の関係がある。き裂先端、き裂と変位拘束部の持続点、および変位拘束部先端において、急激な応力集中が見られる。次に、図-4、図-5 に次式で定義される、無次元化した応力拡大係数とき裂長の関係を示す。

$$F1 + iF2 = \frac{K_I + iK_{II}}{p\sqrt{\pi(c/2)}} \quad (6)$$

ここで、 c は対象形状を x 軸上に投影した全長である。

図-4 に見られるように、 $F1$ (モード I) の値は、屈折角 θ が大きくなるに従って減少し、 $\theta = 90^\circ$ では、ゼロに近い値になっている。き裂長との関係においては、き裂がごく短い間では、著しい増加が認められるが、ある程度長くなると変化がなめらくなっていく。また、 $\theta = 60^\circ$ あるいは $\theta = 90^\circ$ では、き裂が短いところで負の値も得られた。

図-5 から分かるように、 $F2$ (モード II) 値の変化の様子は、 $\theta = 30^\circ$ および $\theta = 60^\circ$ では、 F 値と同様な形であるが、 $\theta = 90^\circ$ の場合にかぎり、き裂が長くなるに従ってゼロに漸近している。

おわりに き裂が無限大のときの $F1, F2$ 値は、同形状で変位拘束のない屈折クラックの解析結果とはほぼ一致していた。また、写像関数を変えることのみにより、他の様々な形状の解析もできる。

(参考文献)

- 1) 北川英夫, 結城良治, 機械学会論文集, 41巻 346号, 1975
- 2) N. Hasebe, Ingenieur-Archiv, 48, 1979
- 3) 上田総, 中谷一弘, 長谷部宣男, 土木学会第36回年次学術講演会概要集 I-41, 1981

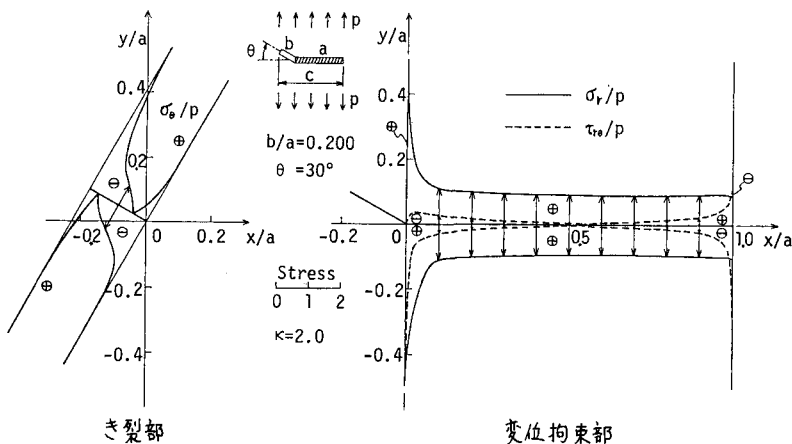


図-3 応力分布

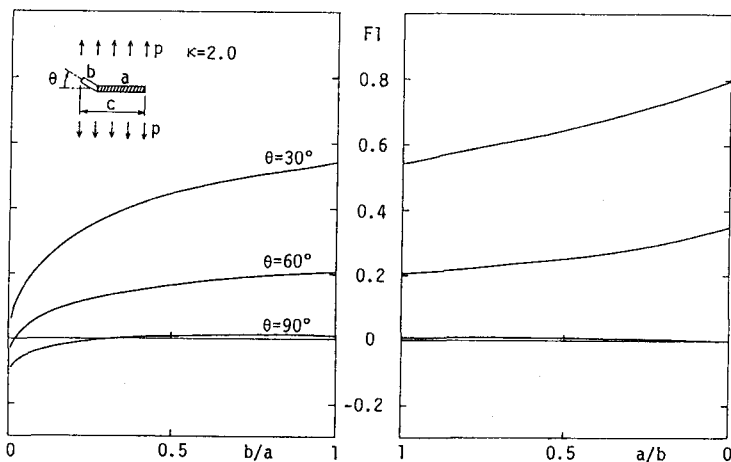


図-4 無次元化した応力拡大係数 $F1$

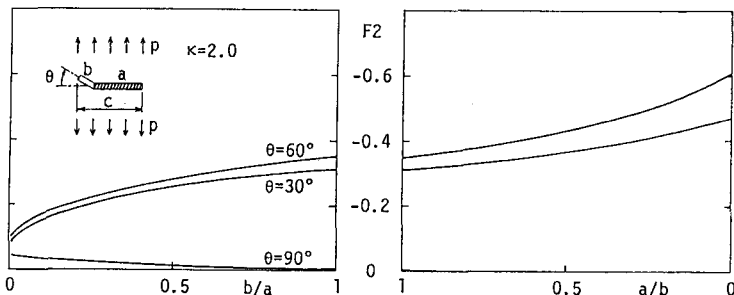


図-5 無次元化した応力拡大係数 $F2$