

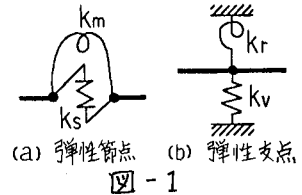
総合技術コンサルタント 正員 久保雅邦
同 上 正員 坂野俊一

1. まえがき

道路橋の走行荷重による動的応答を検討する上で、不完全な連続部や種々の支点条件を持つ構造形式を対象とすることがある。単軌桁の連続化部やゲルバー・ヒンジ部、あるいは弾性支承や回転拘束を伴う支点部を有する場合である。このような場合、一つの方法として、これを弾性節点・弾性支点を有する連続梁としてモデル化し、モード解析によって動的応答を求めることができる。この際、連続梁の固有振動解析にあたっては、従来より動的3連モーメント法の適用¹⁾、結合法²⁾、剛性マトリクス法³⁾等が用いられている。前2者が応力法、第3者が変形法を基本として不静定力や不静定変位を未知数とする連立方程式を導き、その係数行列を用いて固有値を求めるものである。従って、弾性節点や弾性支点が多い場合には、係数行列を求めることが非常に煩雑になるとともに、境界条件によっては解析が困難な場合がある。本研究では、これに対して、固有振動数を表す積分定数を未知数として係数行列を作り、マトリクス演算によって固有振動解析を行っている。解析手法が理解なことから、プログラミングが容易であり、一般化された弾性節点・弾性支点を有する連続梁の固有振動解析が可能である。

2. 固有振動解析の概要

弾性節点とは、接続する部材端の相対変位に比例して断面力が伝達される節点で、モーメントバネとせん断バネで表われ、弾性支点は、支点部の変形に比例した拘束を生ずる支点で、鉛直バネと回転バネで表われる。4つの弾性バネ (K_v, K_s, K_m, K_r) は $[0, \infty]$ の値を持ち各々独立である。(図-1)



梁の動たわみ $Y(t, x)$ を、一般座標 $q_n(t)$ と梁の固有振動数 $\phi_n(x)$ を用いて表わす。

$$Y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \cdot \phi_n(x) \quad \text{--- (1)}$$

計算上 $\phi_n(x)$ は、各径間 l_i との小座標 $x = x_i$ により定義され、任意の径間における第 n 次モード $\phi_n(x)$ は

$$\phi_n(x) = A_n \cdot \cos \beta_n x + B_n \cdot \sin \beta_n x + C_n \cdot \cosh \beta_n x + D_n \cdot \sinh \beta_n x \quad \text{--- (2)}$$

$$\beta_n^4 = (m/gEI) \cdot \omega_n^2 \quad \text{--- (3)}, \quad \lambda_n = \beta_n \cdot l \quad \text{--- (4)}$$

である。 ω_n は梁の n 次固有振動数であり、積分定数 $A_n \sim D_n$ および係数 β_n, λ_n は各径間ごとに求められる。説明上、径間番号とモード次数を表わす添字 i, n を適宜省略する。

梁部材における部材変位 $V(x) = \{\phi(x), \theta(x)\}^T$ と断面力 $F(x) = \{M(x), S(x)\}^T$ の力学的関係式を(2)式に適用すれば、部材の左右両端における変位と断面力 α ベクトル(部材端ベクトル) $X(0), X(l)$ は、積分定数ベクトル C と固有振動数に度なる係数行列 $A(0), A(l)$ を用いて表わされる。 $\{ \quad \}^T$ は列ベクトルを示す。(図-3)

$$X(0) = \begin{Bmatrix} V(0) \\ F(0) \end{Bmatrix}, \quad X(l) = \begin{Bmatrix} V(l) \\ F(l) \end{Bmatrix} \quad \text{--- (5)}$$

$$C = \{A, B, C, D\}^T \quad \text{--- (6)}$$

$$X(0) = A(0) \cdot C, \quad X(l) = A(l) \cdot C \quad \text{--- (7)}$$

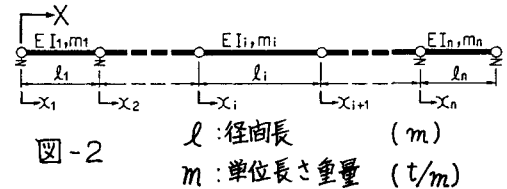


図-2

l : 径間長 (m)
 m : 単位長さ重量 (t/m)

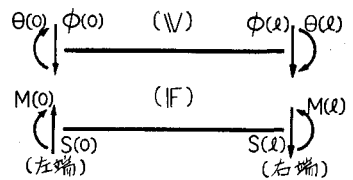


図-3

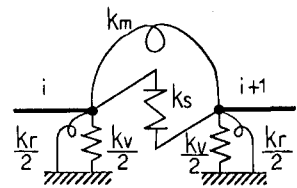


図-4

任意の節点や支点に接続している2つの径間 $i, i+1$ の右端と左端^(*)の部材端ベクトルを用いて次式を作る。

$$\begin{Bmatrix} X(\ell) + X(0) \\ X(\ell) - X(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V(\ell) + V(0) \\ F(\ell) + F(0) \\ V(\ell) - V(0) \\ F(\ell) - F(0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1(\ell), A_1(0) \\ A_2(\ell), A_2(0) \\ A_1(\ell), -A_1(0) \\ A_2(\ell), -A_2(0) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_i \\ C_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

(*) 径間 i の右端
と $i+1$ の左端を用いる。

一方、部材端における釣り合い条件より次式が求められる。(図-4)

$$\begin{cases} F(\ell) - F(0) = K_1 \cdot \{V(\ell) + V(0)\} \\ F(\ell) + F(0) = K_2 \cdot \{V(\ell) - V(0)\} \end{cases} \quad (9)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0, & k_v/2 \\ k_v/2, & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0, & 2k_m + k_r/2 \\ -2k_s - k_v/2, & 0 \end{bmatrix}$$

(9)式を(8)式で2項へ用いてこれを縮小すると、2項はゼロベクトルとなり、合わせて係数行列が K_1, K_2 により縮小される。

——(10)

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_1 A_1(\ell) - A_2(\ell), & K_1 A_1(0) + A_2(0) \\ A_2(\ell) - K_2 A_1(\ell), & A_2(0) + K_2 A_1(0) \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} C_i \\ C_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

以上を全2の節点・支点について行えば、全2の積分定数を未知数とする同次連立方程式が組み立てられる。その係数行列を A とおき、 $\det(A) = 0$ を解いて固有振動数が得られ、再び連立方程式を解いて積分定数を求め、正規化条件を用いて固有振動数 $a_n(x)$ が求められる。(9)式で剛性係数を用いる形をしているが、バネ剛度が大きい場合、剛性係数を左辺に移し柔係数の形をとることによって、あらゆる境界条件に対応できる。その判定は、標準化パラメータ $a \sim d$ と 1.0 との大小関係によって、自動的に行う。 A は、(径間数 $\times 4$) 次のバンド行列(バンド幅 = 11)となる。

標準化パラメータ

$$a = \frac{\ell^3 k_v}{2EI}, \quad b = \frac{\ell \cdot k_r}{2EI}$$

$$c = \frac{\ell^3 (k_v + 4k_s)}{2EI}$$

$$d = \frac{\ell (k_r + 4k_m)}{2EI}$$

3. (計算例)

・単純桁における固有値 λ_n の変化を a, b との関係で図-5に示す。 $b \div 10^1 \sim 10^3$ の範囲で回転バネの効果が見られる。 λ_n に対しては、特に高次においてパラメータ b よりも a の効果が卓越する。

・等2径間連続桁の中向支点上に弾性節点を有する場合を図-6に示す。支点は単純支持 ($a = \infty, b = 0$) である。パラメータ $c \geq 10^1$ においてのみ連続梁としての効果が見られる。また $c \leq 10^2$ でその効果は充分である。詳細な計算例および実際の道路橋における弾性節点・弾性支点の検討については講演時に発表する。

4. おとがき

従来の固有振動解析の方法に比べて、本研究での方法は手法が簡単であり、プログラム化に適すると思われる。但し、行列式の計算においては「はさみ打ち法」を必要とし、固有値が接近する場合、適当な初期値とステップ値を設定する必要がある。尚、計算にあたっては当社の電算システム ACOS 350 を使用している。

(参考文献)

- 1) 小堀・森本：不完全な剛結部を有する構造物の振動性状について，土木学会論文集第186号，1971.2
- 2) 平井：結合法による弾性支承を有する連続ばりの動的解析，土木学会論文集第104号，1964.4
- 3) Hayashikawa, Watanabe ; Dynamic Behavior of Continuous Beams with Moving Loads, ASCE, EMI, 1981.2

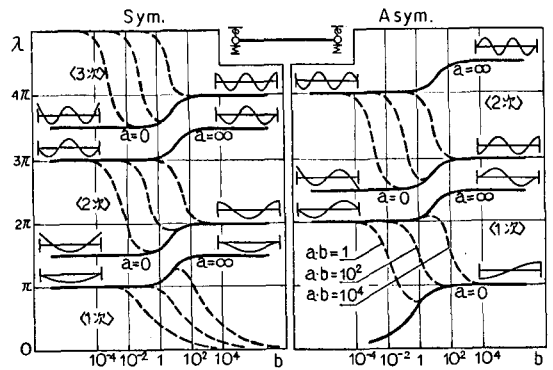


図-5

図-6

