I-36　　超過確率による構造物の信頼性設計

東京大学工学部　学生員　井上　純三
東京大学工学部　正会員　佐藤　尚次
東京大学工学部　正会員　西野　文雄

1．はじめに　　確率論に基づく信頼性設計法の一手法である2次モーメント法は、確率分布の平均値と分散のみで定義される安全性指標を信頼性の尺度とする実用的な設計法であるが、安全性指標βと破壊確率との相関はよくなく、破壊確率は、個々の変数の分布形によって敏感に変わる[1]。2次モーメント法の手法の中に、分布形の情報を取り入れ、安全性指標と破壊確率との相関をよくする2次モーメント法の改良法が、Rackwitz[2]らによって提案されている。ここでは、2次モーメント法に代わる設計方法を提案し、これらの方法と比較する。

2．超過確率による信頼性設計　　構造物の強度をR，荷重効果をSと表わすとき，構造物の破壊は、$Z=R-S<0$で表わされる。このとき、破壊確率P_fは、次式で表わされる。

$$P_f=\mathrm{Prob.}(R-S<0) \tag{1}$$

設計値R^*，S^*を、$\mathrm{Prob.}(R<R^*)=P_R$，$\mathrm{Prob.}(S>S^*)=P_S$より決め、$R^*=S^*$を満たすように設計を行なう。R，Sが正規分布する場合には与えられた破壊確率と，P_R，P_Sの間に次の関係式が成り立つ。

$$P_f=\Phi((\Phi^{-1}(P_R)\sigma_R+\Phi^{-1}(P_S)\sigma_S)/\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}) \tag{2}$$

ここに、σ_R，σ_Sは、それぞれR，Sの標準偏差，$\Phi(x)=\int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$，$\Phi^{-1}$は、$\Phi$の逆関数である。このとき、

$$R^*=\Phi_R^{-1}(P_R)\ ,\ S^*=\Phi_S^{-1}(1-P_S) \tag{3}$$

ここに，Φ_R^{-1}，Φ_S^{-1}は、それぞれR，Sの累積確率分布関数の逆関数である。R，Sの分布形にかかわらず、与えられた破壊確率に対して、式(2)，(3)を用いて、設計値を決めるのが、2次モーメント法の基本的な手法である。Lind[3]の定義によると、設計値は、標準化空間内において、原点からの最小距離を与える破壊限界線上の点であり、この定義に従うならば、与えられた破壊確率に対してP_R，P_Sが、式(2)の代わりに次式から1通りに決まる。

$$\Phi^{-1}(P_R)=\Phi^{-1}(P_f)\cdot\sigma_R/\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2},\ \Phi^{-1}(P_S)=\Phi^{-1}(P_f)\cdot\sigma_S/\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2} \tag{4}$$

式(2)，(3)あるいは式(4)，(3)を用いて設計したとき、式(1)より得られる実際の破壊確率は、R，Sが正規分布に従う場合には、式(2)，及び(4)で与えた破壊確率と一致するが、正規以外の分布に従う場合には、当然のことながら、これとは異なる。一般に構造物の設計で要求される10^{-4}～10^{-8}程度の破壊確率は、変数の分布形の影響を強く受け、分布形が異なれば大きく異なるため、確率分布の平均値・分散のみを用いる2次モーメント法は、破壊確率の対応における精度がよくない。分布形の情報が得られる場合には、これを取り入れ、信頼性の精度の向上が可能な手法が望ましい。最も容易に分布形の情報を反映する方法として、P_R，P_Sに対する設計値を式(3)を用いる代わりに、

$$\left.\begin{array}{l} R^*=\hat{F}_R^{-1}(P_R) \\ S^*=\hat{F}_S^{-1}(1-P_S) \end{array}\right\} \tag{5}$$

を満たすように決める方法が考えられる。ここに、$\hat{F}_R^{-1}$，$\hat{F}_S^{-1}$はそれぞれR，Sの累積確率分布関数$\hat{F}_R$，$\hat{F}_S$の逆関数である。与え

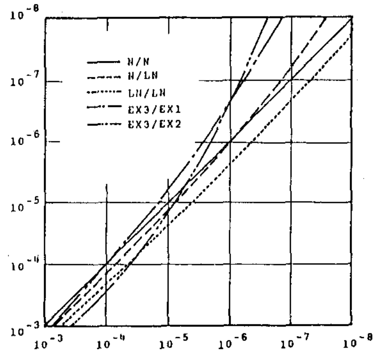

図1　本提案による破壊確率の対応

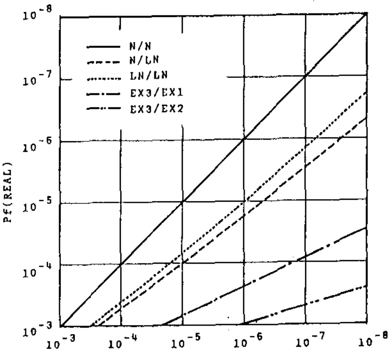

図2　2次モーメント法による破壊確率の対応

られた破壊確率に対して、式(2),(5)を用いて設計したとき、式(1)より得られる実際の破壊確率との対応を数値計算を行ない調べた結果を図1に示す。ここで、R, Sの変動係数が、$V_R=0.10, V_S=0.20$ の場合に対し、分布形の組み合せとして、R及びSが共に正規分布の場合(N/N)、Rが正規分布でSが対数正規分布の場合(N/LN)、R及びSが共に対数正規分布(LN/LN)、Rがワイブル分布でSがグンベル分布(EX3/EX1)、Rがワイブル分布でSがフレヒト分布(EX3/EX2) の5つの例を用いた。同様な計算を2次モーメント法(式(2),(3))に対して行なった結果を図2に示す。図1,図2より、式(2),(5)を用いる方法が、2次モーメント法よりも精度が良いことがわかる。

3. 超過確率による方法の改良　与えられた破壊確率と実際の破壊確率との対応をよくするためには、式(2)にも分布形の情報を反映させるのが良いのは当然のことである。分散を用いた式(2)のかわりに、確率分布の周辺分布形状についての情報を反映し得る高次モーメントを用いる方法が考えられる。ここでは、破壊確率の対応をよくする方法として、1)中央値を中心に必要な側(設計値側)半分を残し、他を捨て、中央値に関して対称な分布を想定する手法、および、2)この仮想的な分布の2次あるいは高次モーメントを用いる手法を考案した。

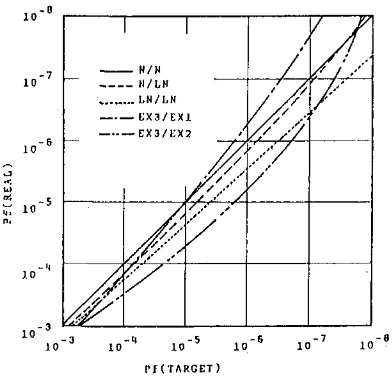

図3 高次モーメントを用いた本提案の改良法による破壊確率の対応

正規分布において、標準偏差は偶数次高次モーメント $\mu^{(n)}$ を用いて、

$$\sigma = \left(\mu^{(n)} \cdot 2^{n/2} \cdot (n/2)! / n!\right)^{1/n} \qquad (6)$$

と表わせる[4]ため、式(2)は、σ の代わりにこの右辺を用いて書き換えることができる。そして、上述の方式で得られた高次モーメントを $\mu^{(n)}$ として用いる。図3は、不要側を捨てた仮想分布について、6次のモーメントを採用した場合の破壊確率と実際の破壊確率との対応を、全く同様な数値計算を行ない調べた結果を示したものである。図1,3を比較すると、10^{-6}～10^{-8} 程度の小さな破壊確率に対しては、改良法の方が精度が良いことがわかる。

4. Rackwitzの近似法との比較　Rackwitzは、2次モーメント法の改良法として、変数を分布形の情報を考慮した等価な正規分布に変換し、この近似的な正規分布に対して2次モーメント法を適用することを提案し、この近似法として、2つの方法を示している。[2] 1つは、平均値が等しく、設計値における累積確率が等しい正規分布への近似であり、もう1つの近似法は、設計値における累積確率分布関数, 確率密度関数の値が共に等しい正規分布への近似である。このような近似的に等価な正規分布に対して、式(2),(3)を用いて、同様の計算を行なった結果を図4,図5に示す。この結果を本提案と比較すると、Rackwitzの後者の近似法が、精度的に最もすぐれているが、一方収束計算が煩雑であるという欠点があり、実用上どちらの方法を採用するのが良いかは、これらの点を考慮して判断する必要がある。

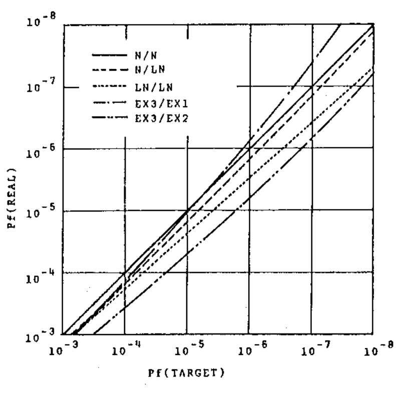

図4 Rackwitzの近似法(I)による破壊確率の対応

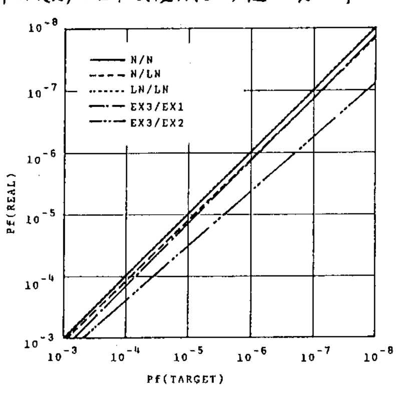

図5 Rackwitzの近似法(II)による破壊確率の対応

参考文献　1) 安田・西野・長谷川；信頼性理論の構造設計への適用法についての一提案, 第34回年講 I−310
2) Rackwitz, R; Practical Probabilistic Approach to Design, CEB Conf; Paris, pp. 13−70, 1976.
3) Hasofer・A; Lind, N; Proc. ASCE, EM1, 1974.2　4) Benjamin, F; Cornell, C; Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers