

防衛大学校土木工学教室 正 員 〇石川信隆

研究科 学生員 三原徹治

香月 智

1. 緒言 従来主として最適設計などの設計分野で威力を発揮してきた最適化手法は、最近、弾塑性解析などの解析分野にも取り入れられている。<sup>(1)(2)</sup> 中でも線形計画法(LP)を用いた増分解析は、その効率的な計算手法と相俟って実用設計のための大規模構造物を対象とした汎用プログラムSTRUPLなどにも応用されている。<sup>(3)</sup> 着者らも過去数年間にわたって、LPによる最適塑性設計や弾塑性解析に関する一連の研究を行ってきたが、ここでは、これらを集大成する目的で、まず非線形計画法(NLP)の双対定理とKuhn-Tucker条件を用いて、終局変形解析と弾塑性増分解析の基本式をそれぞれQP式およびLP式によって定式化した。次いで地盤の影響をも考慮した骨組構造物の弾塑性解析法を確立し、その汎用プログラムの作成を試みた。なお、本研究では慣用の単純型塑性理論に従うほか、次の仮定を用いる。1) 構造物は有限個の部材要素に、地盤はバネ要素に置換できるものとする。2) 降伏条件は線形化降伏凸多面体を用いる。3) 荷重は静的に作用するものとし、分布荷重は集中荷重に置換できるものとする。

表-1 NLPの双対定理

## 2. 非線形計画法(NLP)の双対定理とKuhn-Tucker条件

NLPの双対定理は表-1のように制約条件と変数の正負の状態によって4つのタイプに分類される。<sup>(4)</sup> ここで、i)表の問題(Primal Problem)の条件が非負( $F(x) \geq 0$ )であれば、裏の変数(Dual Variable)も非負( $U_0 \geq 0$ )となり、ii)表の変数(Primal Variable)が非負( $x \geq 0$ )であれば、裏の問題(Dual Problem)の制約は負( $L_x \leq 0$ )となる。iii)また表の問題で $F(x) = 0$ であれば、裏の変数 $U_0$ は無制約( $-\infty \leq U_0 \leq \infty$ )となり、iv)表の変数 $x$ が無制約( $-\infty \leq x \leq \infty$ )であれば、裏の制約は( $L_x = 0$ )となる。次にNLPの最適値を求めるための必要十分条件とし

|            | Primal Problem               | Dual Problem                               |
|------------|------------------------------|--------------------------------------------|
| object     | $Z = g(x) \rightarrow \max.$ | $V = L(x, u) \rightarrow \min.$            |
| constraint |                              |                                            |
| (I)        | $F(x) \geq 0$<br>$x \geq 0$  | $L_x \leq 0$<br>$x \geq 0$<br>$U_0 \geq 0$ |
| (II)       | $F(x) = 0$<br>$x \geq 0$     | $L_x \leq 0$<br>$x \geq 0$                 |
| (III)      | $F(x) \geq 0$                | $L_x = 0$<br>$U_0 \geq 0$                  |
| (IV)       | $F(x) = 0$                   | $L_x = 0$                                  |

表-2 Kuhn-Tucker条件

て、Kuhn-Tucker条件があるが、これも表-2のように4つのタイプに分類される。

|        | Original                     | Kuhn-Tucker Condition                                                                |
|--------|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| object | $Z = g(x) \rightarrow \max.$ |                                                                                      |
| (I)    | $F(x) \geq 0$<br>$x \geq 0$  | $\exists U_0 \geq 0; L_x \leq 0, x \cdot L_x = 0$<br>$U_0 \geq 0, U_0 \cdot U_0 = 0$ |
| (II)   | $F(x) = 0$<br>$x \geq 0$     | $\exists U_0; L_x \leq 0, x \cdot L_x = 0$<br>$U_0 = 0$                              |
| (III)  | $F(x) \geq 0$                | $\exists U_0 \geq 0; L_x = 0$<br>$U_0 \geq 0, U_0 \cdot U_0 = 0$                     |
| (IV)   | $F(x) = 0$                   | $\exists U_0; L_x = 0$<br>$U_0 = 0$                                                  |

## 3. 弾塑性解析法 一般に静的荷重を対象とした弾塑性解析には終局変形解析法と弾塑性増分解析法とがある。

(1) 終局変形解析 (a) QPによる基本式 構造物の崩壊時における応力と変形を求める解析を終局変形解析(ホロミッパ解析)というが、これは表-3①のQPによる弾性解析の応力法の制約に①の降伏条件を追加して終局変形解析の応力法を得る。この応力法に表-1の双対定理を適用すると、QPによる終局変形解析の変形法が②のように得られる。ここに、表-3②の応力法は⑤のつりあい条件と①の降伏条件を満足したうえで、構造全体のコンプリメンタリエネルギーを最小とするように、崩壊荷重時(αF)における応力Qを求める問題であり、変形法は⑥の弾塑性変形適合条件を満足したうえで構造全体のポテンシャルエネルギーを最小とするように崩壊荷重時(αF)における弾性変形 $\theta_e$ 、塑性変形 $\theta_p$  ( $=N\lambda$ )、節点変位 $U$ を求める問題である。

ただし、 $K_e$ =弾性マトリックス;  $K_p$ =剛性マトリックス;  $\alpha$ =荷重係数;  $F$ =外荷重ベクトル;  $N^T$ =断面の線形化降伏線(面)の外向き単位マトリックス;  $R$ =断面の線形化降伏線(面)の原点からの距離;  $\lambda$ =塑性変形を示す乗数;  $N\lambda$  ( $=g_p$ )=塑性変形ベクトル;  $\theta_e$ =弾性変形ベクトル;  $\theta_p$ =降伏変数ベクトル;  $U$ =節点変位ベクトル。さらに $Q_e = K_e C$ ;  $K_p = C^T K_e C$ ;  $A = N^T Z N$ ;  $Z = K_e C K_e^T$ ;  $C K_e = R$ ; ⑤はNLPの双対定理、⑥はKuhn-Tucker条件を適用したことを示す。 $C$ =適合マトリックス;

(b) LPによる基本式 表-3②のQPによる終局変形解析の基本式に表-2のKuhn-Tucker条件を適用すると弾塑性解析に必要な⑤つりあい条件, ②変形適合条件, ①降伏条件および④塑性流れ条件の4つの基本的な条件が得られる。いま④の塑性流れ条件を目的関数とし, ⑤, ②, ①を制約条件とすれば, 表-3の③に示すようなLPによる修正応力法および修正変形法が得られる。

(2) 増分解析 増分解析は初期降伏時より最終崩壊時までの荷重変形関係を求める解析法であり, 表-3の②, ③の終局変形解析の基本式を増分形式として表わせば表-3の④, ⑤がそれぞれ得られる。

4. 数値計算例 図-1(a)に示すような弾塑性地盤中に埋め込まれたアーチ構造物に水平等分布荷重が作用するとき, 図-1(b)のような構造および荷重モデルに置換したうえで, ホロバッフ解析と増分解析を行なった。図-2(a)は最終の崩壊モードを, 図-2(b)は最終の変形図を示したもので, 地盤の降伏により崩壊メカニズムが形成される。この最終状態における結果はホロバッフ解析と増分解析とによる解が全く一致したが, 比例荷重でも途中の段階で除荷が生ずる場合は最終状態の値が一致しない場合がある。図-3は増分解析による荷重-変形関係を示したもので, 固定アーチの場合に比し, 地盤を考慮すると耐力が約52%低下することが認められる。

5. 結言 最適化手法を弾塑性解析分野に適用したことによるメリットとしては, 1) QP, LPによる理論の体系化が行なわれた。

2) 終局変形解析では, 2~3回のLPの適用で一挙に崩壊時の変形状態が得られる, 3) 増分解析では, 荷重増分 $\Delta m$ を最大化することにより塑性

ヒンジの形成から次の降伏までの間隔を明瞭化できるなどである。

### 参考文献

1) Maier, G., Grierson, D.E., and Best, M.J.; "Mathematical Programming Methods for Deformation Analysis at Plastic Collapse", Computers & Structures, Vol. 7, PP. 599-612., Pergamon Press, 1977. 2) Ishikawa, N.; "Load-Deformation Analysis of Elastic-Plastic Frames by Linear Programming, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 23, PP. 413-425, University of Tokyo. Press, 1975. 3) Cohn, M. Z. and Franchi, A., "Structural Plasticity Computers System STRUPL", Proc. ASCE, J. St. Div. Vol. 105, NO. St. 4, April 1979. 4) 坂口 興, "数理計画法" 培風館, 昭和47年。

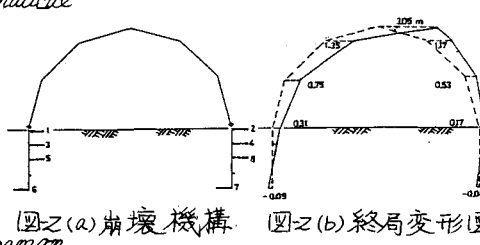


表-3 解析手法の流れ

| ① QP による 弾 性 解 析                                                                                        | 変 形 法                                                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 応 力 法<br>(Minimum Principle of Complementary Energy)<br>$U = \frac{1}{2} Q^T K^{-1} Q \rightarrow \min$ | 変 形 法<br>(Minimum Principle of Potential Energy)<br>$V = \frac{1}{2} Q^T K Q - F^T U \rightarrow \min$ |
| ⑤ $C^T Q = F$                                                                                           | ② $Qe - Cu = 0$                                                                                        |

| ② QP による 終 局 変 形 解 析                                     | 変 形 法                                                       |
|----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 応 力 法<br>$U = \frac{1}{2} Q^T K^{-1} Q \rightarrow \min$ | 変 形 法<br>$V = \frac{1}{2} Q^T K Q - F^T U \rightarrow \min$ |
| ⑤ $C^T Q = \alpha F$                                     | ② $Qe - Cu = 0$                                             |
| ④ $N^T Q - R = 0$                                        | ③ $Qe + N\lambda - Cu = 0$                                  |
| ① $\lambda \geq 0, (-\phi) \geq 0$                       | (where $Qe = K^{-1} Q$ )                                    |

| ③ LP による 終 局 変 形 解 析                       | 変 形 法                                      |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| ② $Z = (-\phi)^T \lambda \rightarrow \min$ | ② $Z = (-\phi)^T \lambda \rightarrow \min$ |
| ⑤ $C^T Q = \alpha F$                       | ⑤ $(C + C^T)^T \lambda = R$                |
| ④ $N\lambda - Cu + K^{-1} Q = 0$           | $N^T Q + \lambda(1 - (-\phi)) = R$         |
| ① $N^T Q + (-\phi) = R$                    | $(-\phi) \geq 0, \lambda \geq 0$           |
| $\lambda \geq 0, (-\phi) \geq 0$           |                                            |

| ④ QP による 増 分 解 析                                                       | 変 形 法                                                                                                         |
|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 応 力 法<br>$U = \frac{1}{2} \Delta Q^T K^{-1} \Delta Q \rightarrow \min$ | 変 形 法<br>$V = \frac{1}{2} \Delta Q^T K \Delta Q - R^T \Delta U - \Delta \alpha F^T \Delta U \rightarrow \min$ |
| ⑤ $C^T \Delta Q - \Delta \alpha F = 0$                                 | ② $\Delta Qe - \Delta Cu = 0$                                                                                 |
| ④ $N^T \Delta Q + \Delta \phi = 0$                                     | ③ $\Delta Qe + N\Delta\lambda - \Delta Cu = 0$                                                                |
| $\Delta\lambda \geq 0$                                                 | $\Delta\lambda \geq 0$                                                                                        |

| ⑤ LP による 増 分 解 析                               | 変 形 法                                     |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\Delta \alpha \rightarrow \max$               | $\Delta \alpha \rightarrow \max$          |
| ⑤ $C^T \Delta Q - \Delta \alpha F = 0$         | ⑤ $(C + C^T)^T \lambda = R$               |
| ④ $N\lambda - \Delta Cu + K^{-1} \Delta Q = 0$ | $N^T \Delta Q + \lambda(1 - (-\phi)) = R$ |
| ① $N^T \Delta Q + \Delta \phi = 0$             | $(-\phi) \geq 0, \lambda \geq 0$          |
| $\Delta\lambda \geq 0$                         | $\Delta\lambda \geq 0, (-\phi) \geq 0$    |

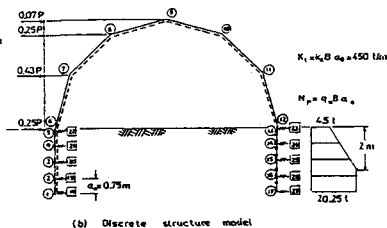


図-1 (b) 構造および荷重モデル

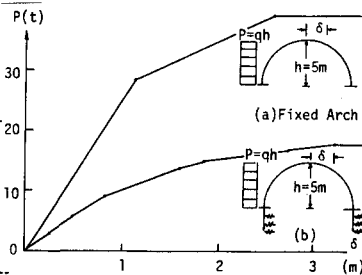


図-3 荷重-変形曲線