

防衛大学校土木工学教室 正員 石川信隆

学生員 三原徹治

正員 岡元北海

1. 緒言 最近のパソコンやマイコンなどの普及は目覚ましく、構造解析や設計の分野においても、大型計算機の利用と並んで、今後益々小型コンピュータの使用が盛んになるものと思われる。構造分野における小型コンピュータのメリットとしては(i)各現場の設計事務所などで手軽に使用できる、(ii)コンピュータの使用料が殆んどいらない(電気代のみ)、デメリットとしては(iii)計算容量が小さく、大型構造物の解析・設計ができない、(iv)計算時間が長い、などが考えられる。

本研究は、上記の難点(iii)を克服するための一つの試みとして、在来の線形計画法(LP)による骨組構造の最適塑性設計¹⁾にLP分割法^{2),3)}を適用することにより、マトリックス容量の縮小化ひいては全計算容量の減少化を図り、小型コンピュータによる大型構造物の設計を可能にすることを企図したものである。なお、本研究では慣用の剛塑性理論に使うものとし、曲げ構造のみを対象とした。

2. LP分割法の原理 ここでは、Dantzig-Wolfeによって提案されたLP分割法の原理^{2),3)}を述べ、その計算フローチャートの概要を示すこととする。

(1)原問題 いま係数行列を表1のような分割可能な形で与えられた場合を考え、これを原問題(Original problem)と名付ける。ただし、 $x_i = m_i$ 要素の縦ベクトル、 $A_i = (m_i \times n_i)$ のマトリックス、 $c_i = n_i$ 要素の横ベクトル、 $B_i = (m_i \times n_i)$ のマトリックス、 $b_i = m_i$ 要素の縦ベクトル、 $\sum_{i=1}^m n_i = N$ 、 $\sum_{i=1}^m m_i = M$ 。ここで行列 $B_1, B_2, \dots$ などを係数にする子問題(Subproblem)に分割して解くと、計算量は少なくなることを予想される。しかし、 $A_1, A_2, \dots, A_m$ の共通部分で結ばれているため、子問題で解いた解がそのまま最適解でなく、全体の可能解は、各子問題における基底解の線形結合で表わすことができる。分割原理は、これを利用して子問題の目的関数を逐次修正しながら、全体の最適解を反復繰り返しによって得る方法である。

(2)子問題形式 まず表1の原問題のうち、部分行列 B_i を係数にするような問題は、 $i=1, 2, \dots, m$ 個考えられ、これを子問題形式と呼び、式(2)のようなLP問題として表わされる。一般に、この子問題を解くことは、式(2b)の制約式の多面体の端点を求めることになる。しかし式(1)の原問題の最適解は必ずしも子問題の端点にあるとは限らず、子問題 i の可能領域内の任意の点になる。これは端点座標 V_{ik} ($k=1, 2, \dots, v$)の線形結合、すなわち式(3)によって表わされることを意味する。ここに、 V_{ik} は要素 i の凸多面体の k 番目の端点座標ベクトル、 λ_{ik} は凸1次結合を示す係数、 k は端点の番号、 v は端点の総数。

(3)親問題形式 式(3)を式(1)に代入すれば、 λ_{ik} を未知数とする新しいLP問題が得られ、これを親問題形式と呼び、図式的に書くと表2が得られる。ただし、 $d_{ik} = c_i V_{ik}$ 、 $g_k = A_i V_{ik}$ 。

表1 原問題

未知数	x_1	x_2	...	x_m	
目的関数	c_1	c_2	...	c_m	$\rightarrow \max$ (1a)
制約条件	A_1	A_2	...	A_m	$= b_0$ (1b)
	B_1				$\leq b_1$ (1c)
		B_2			$\leq b_2$
					$\vdots$
				B_m	$\leq b_m$

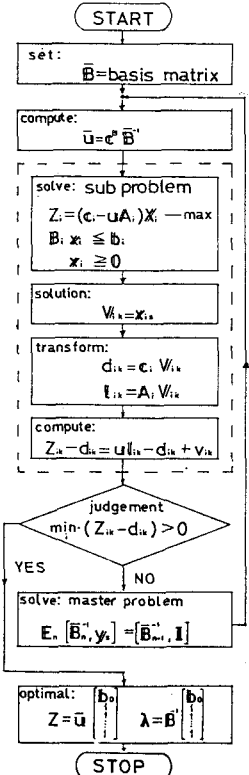


図1 LP分割法の流れ図

$$\begin{aligned} \text{未知数: } & x_i \\ \text{目的関数: } & Z = c_i x_i \rightarrow \max \quad (2a) \\ \text{制約条件: } & B_i x_i \leq b_i \quad (2b) \\ & x_i \geq 0 \quad (2c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{k=1}^v V_{ik} \lambda_{ik} \quad (3a) \\ \sum_{k=1}^v \lambda_{ik} &\leq 1 \quad (3b) \\ \lambda_{ik} &\geq 0 \quad (3c) \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, m \quad k=1, 2, \dots, v)$$

(4) LP分割法のフローチャート によって表2の親問題形式に改訂単体法³⁾を適用すれば、LP分割法による計算フローチャートが図1のように得られ、これによる計算プログラムを「DECOMP」と名付けた。ただし、 $\bar{B}^{-1}$ = 実行可能基底逆行列、 u_i = 掃出列、 $\bar{u}$ = 双対変数 $\{u, v\}$ 、 c^0 = 基底変数に対応する目的関数係数ベクトル。

3. 最適塑性設計への適用 塑性最小重量設計の静的定理(Static Theorem)は、平衡条件と降伏条件を満足したうえで、構造重量を最小にするLP問題であり、表3のような形で表わされる。ただし、 C_i = 部材要素iの適合マトリックス、 N_i = 部材要素iの降伏凸多面体の外向き法線単位ベクトル、 K_i = 降伏凸多面体における原点から降伏線までの距離を示すベクトル、 F = 節点作用荷重ベクトル、 Q_i = 部材要素iの作用断面力、 α_0 = 荷重係数、 L_{ik} = 設計変数 M_{ik} に対応する部材要素長、 T = 部材要素と設計変数を結びつける等価変換マトリックス。レなるに式(5c)の降伏条件は右辺が0であるから凸多面体は形成されないため、表3を設計変数 M_{ik} ごとのグループに組み替え、表4のような形に変換して、これにLP分割法を適用した。ただし、 $\bar{K}_i = [K_{i1}, K_{i2}, \dots, K_{in}]$ 、 $\bar{T}_i = [T_{i1}, T_{i2}, \dots, T_{in}]$ 、 $C_{i0} = C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{in}$ 、 $F_0 = C_{i0}$ に対応する節点作用荷重ベクトル。

4. 数値計算例 ここでは図2のような2層ラーメンに対し、最適塑性設計を行った結果を示す。表5は最小重量と設計変数 M_{ik} ($i=1,2,3,4$) の結果を示したもので、従来の解と全く一致した。また表6はマトリックスサイズと計算時間について従来の解法と比較したもので、マトリックスサイズは約1/5に縮小されたが計算時間は約4倍に増加した。なお計算にはYHPシステム45Bを使用した。

5. 結 言 本報告は、従来の最適塑性設計法にLP分割法を適用することにより計算時間は多少長くとも全計算容量の縮小化を図ったものである。本研究の成果としては、(1)LP分割法による計算プログラムDECOMPにより最適塑性設計が可能となり、その解の妥当性を数値的に検証された。(2)従来の解法に比し、マトリックスサイズは約1/5~1/4に縮小され、その縮小率は大規模構造物ほど顕著であることが確かめられた。(3)計算時間は繰返し計算のためかなり長くなるが、コンピュータ使用料は殆んど不要であるので、夜間利用すればある程度解決される。(4)LP分割法と有限要素法とを結合させることにより、板構造物への応用も可能である⁴⁾。

参考文献 1) 石川, 大野, 田元; 立体構造物の最適塑性設計に関する考察, 土木論文報告集, No. 279, 1978. 11 2) Gass, S.I.; Linear Programming, P.189, McGraw Hill, 1959. 3) 小野勝章; 計算を中心とした線形計画法, P.130, 日科技連出版, 1979. Plastic Design of Structures, Int. J. Solid & Structures, vol. 17, PR 39-56, 1981. Plastic Structures, ASCE, vol. 98, EMS, Oct. 1972.

表-2 親問題形式

未知数	$\lambda_{11} \lambda_{12} \cdots \lambda_{1n}$	$\lambda_{21} \lambda_{22} \cdots \lambda_{2n}$	$\cdots$	$\lambda_{m1} \lambda_{m2} \cdots \lambda_{mn}$		
目的関数	$d_{11} d_{12} \cdots d_{1n}$	$d_{21} d_{22} \cdots d_{2n}$	$\cdots$	$d_{m1} d_{m2} \cdots d_{mn}$	$\rightarrow \max. \quad (4a)$	
制約条件	$u_{11} u_{12} \cdots u_{1n}$	$u_{21} u_{22} \cdots u_{2n}$	$\cdots$	$u_{m1} u_{m2} \cdots u_{mn}$	$= b \quad (4b)$	
$i=1$	1	1	$\cdots$	1	$= 1$	
$i=2$		1	1	$\cdots$	$= 1 \quad (4c)$	
$\vdots$					$\vdots$	
$i=m$				1	1	$= 1$

表-3 最適塑性設計の基本形式

未知数	$Q_i, Q_2, \dots, Q_m$	$M_{p1}, M_{p2}, \dots, M_{pn}$	
目的関数	0	0	$\dots$ L_i^T $\rightarrow \min$ (5a)
制約条件	$C_i^T, C_i^T, \dots, C_m^T$		$= \alpha_0 F$ (5b)
$i=1$	N_i^T	$K_i, T_{i1}, K_i, T_{i2}, \dots, K_i, T_{in}$	≤ 0
$i=2$	N_i^T	$K_i, T_{i1}, K_i, T_{i2}, \dots, K_i, T_{in}$	≤ 0 (5c)
$\vdots$			$\vdots$
$i=m$	N_m^T	$K_m, T_{m1}, K_m, T_{m2}, \dots, K_m, T_{mn}$	≤ 0

表-4 グループ化基本形式

未知数	$M_{i1}, Q_{i1}, M_{i2}, Q_{i2}, \dots, M_{in}, Q_{in}$	
目的関数	$L_i^T, 0, L_i^T, 0, \dots, L_i^T, 0$	$\rightarrow \min$
制約条件	0 $C_{i0}^T, 0, C_{i0}^T, \dots, 0, C_{i0}^T$	$= \alpha_0 F_0$
$h=1$	$K_i, T_{i1}, N_i^T, C_{i1}^T$	≤ 0
$h=2$	$K_i, T_{i2}, N_i^T, C_{i2}^T$	≤ 0
$\vdots$		$\vdots$
$h=n$	$K_i, T_{in}, N_i^T, C_{in}^T$	≤ 0

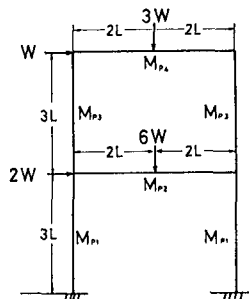


図-2 構造載荷形式

表-5 最適解

	Z (xWL ²)	$M_{p1}(xWL)$	$M_{p2}(xWL)$	$M_{p3}(xWL)$	$M_{p4}(xWL)$
Static	51.0	3.0	4.5	1.5	1.5
Kinematic	51.0	3.0	4.5	1.5	1.5
DECOMP	51.0	3.0	4.5	1.5	1.5

表-6 計算容量と計算時間

	Matrix size	Computing time
Static	3589 (100%)	5 min.
Kinematic	1273 (35.5%)	2.3 min.
DECOMP	652 (18.2%)	21.2 min.

4) Woo, T.H. & Schmit, L.A.; Decomposition in Optimal

5) Cohn, M.Z., et al.; Unified Approach to Theory of