I-15　双対理論による構造最適化の基礎的研究

愛媛大学大学院　学生員○谷脇　一弘
愛媛大学工学部　正　員　大久保禎二

1. まえがき

構造設計の最適化を行なう場合，考慮すべき設計変数および制約条件の性質と共に，その数が最適解を決定することの難易度に大きな影響を与え、一般的にはそれぞれの数が少ないほどより容易に最適解を決定することができる。このような観点からこれまでは構造要素の *Suboptimization* による最適設計法や設計変数をリンクする方法，設計変数の改良過程で *active* な制約条件を判定する方法などが提案されているが、さらに原問題のラグランジュ関数を導入し，まず *active* な制約条件に対する双対変数を決定した後、その双対変数の関数として原設計変数を決定する双対理論に基づく最適設計法も注目される方法の一つである。

本研究は，構造設計における線形近似された制約条件と，設計変数の逆数の和で表わされる目的関数を用いてラグランジュ関数を導入し、まず *active* な制約条件に関するラグランジュ乗数をニュートン法により決定し，次にこれを用いて最適な原設計変数を決定する双対理論に基づく構造物の最適設計法に関する基礎的研究を行なったものである。

2. 理論の概要

1). 連続変数の場合

○ 原問題

$$\left.\begin{array}{lll} \text{目的関数} & : & W(\vec{X})=\sum_{b=1}^{B}\dfrac{W_b}{X_b} \rightarrow min \\ \text{制約条件} & : & h_q(\vec{X})=\bar{U}_q-\sum_{b=1}^{B}C_{bq}X_b \geq 0 \ ,\ q\in Q_R \\ \text{Side Constraints} & : & X_b^{(L)} \leq X_b \leq X_b^{(U)} \ ,\ b=1,\cdots,B \end{array}\right. \qquad \begin{array}{ll} \text{ここに，} & \\ W_b & : \text{定数} \\ X_b & : \text{原問題の設計変数} \\ B & : \text{設計変数の数} \\ Q_R & : \text{制約条件の数} \\ C_{bq},\ \bar{U}_q & : \text{定数} \end{array} \qquad (1)$$

上式の制約条件 $h_q(\vec{X})$ は原制約条件をテーラー展開の第１次の項で線形近似したものである。次にこの原問題のラグランジュ関数を導入すると，次式を得る。

$$\mathbb{L}(\vec{\lambda})=\sum_{b=1}^{B}\left\{\underset{X_b^{(L)}\leq X_b\leq X_b^{(U)}}{Min}\left[\frac{W_b}{X_b}+X_b\sum_{q\in Q_R}\lambda_q C_{bq}\right]\right\}-\sum_{q\in Q_R}\lambda_q\bar{U}_q=\sum_{b=1}^{B}\ell(X_b)-\sum_{q\in Q_R}\lambda_q\bar{U}_q\ ,\ \text{ただし}\ \ell(X_b)=\left\{\underset{X_b}{Min}[\cdots]\right\} \qquad (2)$$

上式の $\ell(X_b)$ の各項は X_b のみの関数であるので，$\mathbb{L}(\vec{\lambda})=\sum_{b=1}^{B}\ell(X_b)-\sum_{q\in Q_R}\lambda_q\bar{U}_q$ の $\vec{X}$ に関する最小化は、$\ell(X_b)$ をそれぞれ X_b について独立に最小化することにより達成することができる。従って $\dfrac{\partial\ell(X_b)}{\partial X_b}=0$ より，次の X_b と $\vec{\lambda}$ との関係式が導入される。

$$X_b=\left[\frac{W_b}{\sum_{q\in Q_R}\lambda_q C_{bq}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

このようにして原問題の双対問題を次のごとくに導入することができる。

○ 双対問題

$$\left.\begin{array}{l} \text{目的関数}\ :\ \mathbb{L}(\vec{\lambda})=\sum_{b=1}^{B}\dfrac{W_b}{X_b}+\sum_{q\in Q_R}\lambda_q\left[U_q(\vec{X})-\bar{U}_q\right]\rightarrow max \\ \text{制約条件}\ :\ \lambda_q\geq 0\ \ ,\ q\in Q_R \\ X_b=\left[\dfrac{W_b}{\sum_{q\in Q_R}\lambda_q C_{bq}}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad if\ \left[X_b^{(L)}\right]^2<\dfrac{W_b}{\sum_{q\in Q_R}\lambda_q C_{bq}}<\left[X_b^{(U)}\right]^2 \\ X_b=X_b^{(L)} \qquad if\ \dfrac{W_b}{\sum_{q\in Q_R}\lambda_q C_{bq}}\leq\left[X_b^{(L)}\right]^2\ ,\ X_b=X_b^{(U)} \quad if\ \dfrac{W_b}{\sum_{q\in Q_R}\lambda_q C_{bq}}\geq\left[X_b^{(U)}\right]^2 \end{array}\right\} \qquad (4)$$

(4)式の $\mathbb{L}(\vec{\lambda})$ を最大にする $\vec{\lambda}$（$\vec{\lambda}$ の最適値）は，ニュートン法を用いて次式より最小化の方向 $\vec{S_t}$ を決定し，$\vec{\lambda}_{t+1}=\vec{\lambda}_t+dt\vec{S_t}$ として $\mathbb{L}(\vec{\lambda})$ を最大にする $\vec{\lambda}_{t+1}$ を求める。

$$S_t=-\left[F(\vec{\lambda}_t)\right]^{-1}\nabla\ell(\vec{\lambda}_t) \qquad (5)$$

ここに，$F(\vec{\lambda}_t)$ は active な制約条件式の Hessian Matrix，$\nabla l(\vec{\lambda}_t)$ は第1次偏微係数であり，次式で求められる。

$$F_{gk}=-\frac{1}{2}\sum_{b\in\bar{B}}\frac{C_{bg}C_{bk}}{W_b}X_b^3\ ,\ \bar{B}=\left\{b\,|\,X_b^{(L)}\le X_b\le X_b^{(U)}\right\}\cdots(6)\quad ,\ \frac{\partial l}{\partial\lambda_g}(\vec{\lambda})=u_g(\vec{X})-\bar{u}_g\ ,\ g\in Q_R\quad\cdots(7)$$

2). 離散変数をも含む場合

今，原設計変数 X_b が離散値をとるものとすると，その $X_b^{(k)}$ および $X_b^{(k+1)}$ における $l(X_b)$ は次式のようになる。

$$l(X_b^{(k)})=\frac{W_b}{X_b^{(k)}}+X_b^{(k)}\sum_{g\in Q_R}\lambda_g C_{bg}\cdots(8)\qquad l(X_b^{(k+1)})=\frac{W_b}{X_b^{(k+1)}}+X_b^{(k+1)}\sum_{g\in Q_R}\lambda_g C_{bg}\cdots(9)$$

(8)，(9)両式の交線を $f_b(\vec{\lambda})$ とおくと，

$$f_b(\vec{\lambda})\equiv\vec{\lambda}^T\vec{C}_b-\frac{W_b}{X_b^{(k)}X_b^{(k+1)}}=0\qquad(10)$$

となり，$f_b(\vec{\lambda})$ の方向に $\vec{\lambda}$ を改良することにより，改良解を得ることができる。また，$\vec{\lambda}_t$ が，$x_1\sim x_P$ の P個の離散変数が形成する(10)式の不連続空間に属する場合には，その $\vec{\lambda}$ の改良方向は $[P]=[I-N(N^TN)^{-1}N^T]$ として，$\vec{S}=[P]\vec{h}$ より得られる。ここに，I は $Q_R\times Q_R$ の単位行列，N は $Q_R\times P$ の matrix，$\vec{h}$ は $Q_R\times 1$ の matrix であり，それぞれ次のような成分をもつ。

$$\underset{Q_R\times P}{[N]}=[\vec{C}_1,\vec{C}_2,\cdots,\underset{Q_R\times 1}{\vec{C}_b},\cdots,\vec{C}_P]\cdots(11)\quad ,\quad h_g=\sum_{b=P+1}^{B}C_{bg}X_b-\bar{u}_g\quad\cdots(12)$$

上式で得られた $\vec{S}$ の方向に $\vec{\lambda}$ の最大化をくり返すことにより，$\vec{\lambda}$ の最適点を得ることができる。

3. 計算例および考察

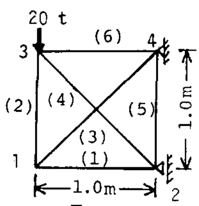

図-1.

上記の理論により，図-1に示す不静定トラスの断面を連続変数と仮定した場合の最適断面を決定した結果を表-1に示す。表-1の計算結果およびその他多くの計算例より次のことが明らかとなった。

1）双対変数($\vec{\lambda}$)の初期値を変えることにより，得られる最適解は異なるが，最小トラス重量はほとんど変化なく同一の値を得ている。このことより，双対法はきわめて信頼性のある最適化手法であるということができる。 2). たわみ制限が0.27cmの場合，応力制限がactiveな制約条件となり，許容応力から決定される $X_b^{(U)}$ が有効に働き，反復回数が2～6回で最適解を得ている。一方，たわみ制限が0.22cmの場合には，たわみ制限のみがactiveな制約条件となり，すべての部材断面がたわみ制限より決定されているにもかかわらず，最適解を得るために10回の反復回数を要しているのは，$\vec{\lambda}$ の反復改良の過程で，応力の制約条件に対する λ が0となるに要する回数がある程度必要となるためである。また，たわみ制限が0.24cmの場合には，応力およびたわみ制限がactiveとなり，改良過程で各部材のactiveな制約条件式が変化し，これにより $\vec{S}_t$ が変化し，$\vec{\lambda}$ が一定値に収束するための反復回数が増加したためである。 3). 本法で制約条件を原設計変数について線形近似したことにより，F_{gk} および $\frac{\partial l}{\partial\lambda_g}$ をそれぞれ(6)式および(7)式から簡単に計算でき，さらに(5)式における $[F(\vec{\lambda}_t)]^{-1}$ は active な制約条件式の数の減少に伴い次元が減少し，$\vec{\lambda}$ を解くことがより容易となる。また(2)式の導入により，離散変数をも含む最適問題への拡張も容易となる。これらのことは本法の大きな長所となる。 4). また目的関数を(1)式の $W(\vec{X})$ のような形に表現したことにより，$\vec{X}$ と $\vec{\lambda}$ の関係を(3)～(4)式のごとく簡単な関係式で表わすことができ，このことも計算アルゴリズムを単純にしている。なお，離散変数をも含む場合の計算例については講演当日発表する。

表-1（図[**]-1に示すトラスの種々のたわみ制限における λ の初期値および最適値）

	たわみ制限 δ_{max}	0.27cm		0.24cm		0.22cm	
初期値(λ)	$\lambda_{\sigma1}$	0.80	0.001	0.80	0.01	0.80	0.01
	$\lambda_{\sigma2}$	1.25	0.001	1.25	0.01	1.25	0.01
	$\lambda_{\sigma3}$	0.30	0.001	0.30	0.01	0.30	0.01
	$\lambda_{\sigma4}$	0.90	0.001	0.90	0.01	0.90	0.01
	$\lambda_{\sigma5}$	3.84	0.001	3.84	0.01	3.84	0.01
	$\lambda_{\sigma6}$	2.31	0.001	2.31	0.01	2.31	0.01
	$\lambda_{\delta max}$	0.50	0.001	0.50	0.01	0.50	0.01
最適解	A_1[*](cm^2), $\lambda_{\sigma1}$	7.21 0.31	8.08 0.001	6.74 0.0	8.08 0.0	7.00 0.0	8.64 0.0
	$A_2(cm^2)$, $\lambda_{\sigma2}$	7.21 0.0	8.08 0.001	6.74 0.0	8.08 0.0	7.00 0.0	8.64 0.0
	$A_3(cm^2)$, $\lambda_{\sigma3}$	9.00 0.69	10.10 0.001	9.17 0.0	11.08 0.0	9.90 0.0	12.23 0.0
	$A_4(cm^2)$, $\lambda_{\sigma4}$	12.67 0.0	11.43 0.001	13.33 0.0	11.43 0.06	14.60 0.0	12.23 0.0
	$A_5(cm^2)$, $\lambda_{\sigma5}$	7.92 0.14	7.14 0.001	9.06 0.0	7.71 0.0	10.31 0.0	8.64 0.0
	$A_6(cm^2)$, $\lambda_{\sigma6}$	7.92 0.36	7.14 0.001	9.06 0.0	7.71 0.0	10.31 0.0	8.64 0.0
	$\lambda_{\delta max}$	0.0	0.0	25.58	25.64	31.72	31.63
改良反復回数		5	2	13	22	9	10
トラス解析回数		6	3	6	6	8	7
最小トラス重量(kg)		6090.8	6090.8	6342.7	6342.5	6923.9	6914.9
activeな制約条件		$\sigma1,\sigma2,\sigma3,\sigma4,\sigma5,\sigma6$		$\sigma1,\ \sigma2,\ \delta$		δ	

*) $A_b=100/X_b$，**) 目的関数 $W(X)=\sum_{b=1}^{6}\frac{L_b\times100}{X_b}\Rightarrow min$ (L_bは部材長)，制約条件 $\sigma_{ai}-\sigma_i\ge0\,(i=1,\cdots,6)$，$\delta_a-\delta_{max}\ge0$

参考文献 Claude Fleury and Lucien A. Schmit, Jr.: Dual Methods and Approximation Concepts in Structural Synthesis: NASA Report 3226, Dec. 1980