

愛媛大学大学院 学生員。松原 光宏

愛媛大学工学部 正 員 大久保 禎二

1. まえがき

構造物の設計は、技術的、経済的、社会環境的、美的などの因子によって課せられる種々の制約条件の下で、要求される機能を十分に遂行できる最適設計変数を決定することであり、このような設計変数の決定には、個々の部材断面の決定から構造形式の決定まで、多くの段階における数多くの意志決定が含まれる。1)に於てこのような設計過程に論理的な意志決定の方法を導入し、計算機により構造設計における意志決定とある程度代行させ得るような、あるいは意志決定に必要なデータを自動的に提供することが出来るような *Optimizer* の *Subroutine Library* を作成し、利用することは、構造設計を最適に行なうために不可欠な重要事項となっている。本研究では、これまでに提案されている数多くの非線形計画法の中で、近年その信頼性および有効性が指摘されている *SQP* (*Successive Quadratic Programming*) について、基礎的研究を行なった結果について述べるものである。

2. SQPの概要²⁾

次の非線形計画問題を考える。

$$\begin{aligned} F(x) \rightarrow \min. \quad & \text{ここに、} x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \\ \text{subject to } G_i(x) \geq 0, \quad & (i=1, 2, \dots, m) \quad F(x): \text{目的関数}, G_i: \text{制約条件} \end{aligned} \quad (1)$$

上式のSUMTの外点法における罰金関数を次のように定義する。

$$P(x_k, r_k) = F(x_k) + \frac{1}{r_k} V(x_k)^T V(x_k) \quad (2)$$

ここに、 $V(x_k)$ は x_k で違反している制約条件を表わし、 r_k は罰金項の重みを表わすパラメータである。いま、点 $x_k + s$ が $P(x, r_k)$ の最小点であるとすれば、

$$\nabla P(x_k + s, r_k) = f_k + \frac{2}{r_k} (W_k^T V_k + W_k^T W_k s) = 0 \quad (3)$$

でなければならない。ここで、 f_k , W_k はそれぞれ F_k , V_k の1次の偏微係数である。 B_k を目的関数の2次の偏微係数であるとし、(3)式の両辺に $W_k B_k^{-1}$ を乗ずると、次式を得ることができる。

$$W_k s = -\frac{r_k}{2} \lambda_k - W_k \quad \text{ここに、} \lambda_k = (W_k B_k^{-1} W_k^T)^{-1} W_k B_k^{-1} f_k \quad (4)$$

上記の W_k は x_k および $x_k + s$ で違反している制約条件のみについて考慮しているが、 x_k で満足しているが $x_k + s$ で満足しなくなる制約条件 $\bar{C}_k$ も考慮することとすると、 $g_k = \begin{bmatrix} W_k \\ \bar{C}_k \end{bmatrix}$ とし、 A_k と g_k の1次の偏微係数として、(4)式と同様に次式が導入できる。

$$A_k s = -\frac{r_k}{2} \lambda'_k - g_k \quad \text{ここに、} \lambda'_k = (A_k B_k^{-1} A_k^T)^{-1} A_k B_k^{-1} f_k \quad (5)$$

そこで、目的関数 F を x_k の近傍で2次形式に近似し、かつ(5)式の制約条件を考慮すると、次の s に関する2次計画問題が導入できる。

$$\left. \begin{aligned} \min. \quad & f_k^T s + \frac{1}{2} s^T B_k s \\ \text{subject to } & A_k s = -\frac{r_k}{2} \lambda'_k - g_k \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

この2次計画問題の解 s_k は、2次計画法により次式で決定される。

$$s_k = B_k^{-1} \left\{ A_k^T (A_k B_k^{-1} A_k^T)^{-1} (A_k B_k^{-1} f_k - \frac{r_k}{2} \lambda'_k - g_k) - f_k \right\} \quad (7)$$

しかし、 B_k の不正確さや制約条件 g_k の線形近似などの誤差により、(7)式より得られる s_k は必ずしも x_k を改良するとは限らない。そこで、確実に罰金関数 $P(x, r_k)$ を減少させる改良点 x_{k+1} を s_k の方向に *line search* により、 $x_{k+1} = x_k + \alpha s_k$ として求める。また、上記のprocessにおいて、目的関数の2次の偏微係数の逆行列 B_k^{-1} は直接求めると計算量が多くなるので、次のようにBFGS公式またはDFP公式により求めている。ここで、 $y_k = f_{k+1} - f_k$, $z_k = B_k^{-1} y_k$ とする。

$$B_{k+1}^{-1} = B_k^{-1} - \frac{s_k z_k^T}{s_k^T y_k} - \frac{z_k s_k^T}{s_k^T y_k} + \left(\alpha + \frac{s_k^T z_k}{s_k^T y_k} \right) \frac{s_k s_k^T}{s_k^T y_k}, \quad \text{if } s_k^T y_k \geq y_k^T z_k \quad (8)$$

$$B_{k+1}^{-1} = B_k^{-1} - \frac{Z_k Z_k^T}{Y_k^T Z_k} + \alpha \frac{S_k S_k^T}{S_k^T Y_k}, \quad \text{if } S_k^T Y_k < Y_k^T Z_k \quad (9)$$

また、罰金項の重み Y_k は、式より求め、最適解に近づくにつれて、 Y_k は自動的に 0 に近づく。

$$Y_k = -\beta \frac{Z_k^T W_k}{W_k^T X_k} \quad \text{ここに、} 0 < \beta < 1 \quad (10)$$

3. 計算例および考察

上記の SQP により 図-1 に示す静定トラスの最小重量設計を行なった例について述べる。式(6)に示すごとく SQP では目的関数と2次近似しているので設計変数の2次以上の関数が必要ではない。そこで、ここでは各部材断面 A と 図-2 に示す正方断面とを考え、その一边 D を設計変数とした。

目的関数 $F = P \sum A_i l_i = P \sum \sigma_i^2 l_i$, l_i : 部材長

制約条件 $\begin{cases} g_i = \sigma_{ai} - \sigma_i \geq 0 & (i=1, \dots, 6) \\ g_7 = \delta_a - \delta \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_{ai} = 1400 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_{ca} = 1237 \text{ kg/cm}^2 \end{cases}$

$$P = 1 \text{ kg/cm}^3, \quad E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

格点3の垂直変位を δ とし、種々のたわみ許容値 δ_a における初期値と最適値を表-1 に示す。表-1 の結果から明らかなように応力制限のみが active な制約条件の場合には、いかなる初期値からでも全体的な最適解に収束している。また、 $\delta_a = 0.25 \text{ cm}$ および 0.20 cm などのように、部材の一部またはすべてがたわみ制限により決定される場合には、初期値により最適断面は多少異なるが、目的関数値はまったく同一の値を得ており、SQP は信頼性のある Optimizer であるということが言える。また、 $\delta_a = 0.30 \text{ cm}$ の場合に比べ、 $\delta_a = 0.25 \text{ cm}$ および 0.20 cm の場合、最適解を得るための反復回数が増加しているのは、たわみ制限の曲面上に最適解が存在し、最適解の近くで解が振動するためであり、最適解に収束させるためには、SLP と同様に adaptive move limit の条件を必要とした。

4. SQP の特徴

これまでの研究により、SQP の計算アルゴリズムの特徴をまとめると次のようになる。

1) 違反している制約条件のみを考慮すればよいので、 N スペースの次元は小さくなり、問題と単純化している。しかし、厳密には、最適解のみがすべての制約条件を満足することとなり、改良過程における解は設計に使用することができない。この点で SUMT の内点法と対照的である。また、実行可能領域内からは目的関数のみに着目し、準ニュートン法により設計変数を改良している。2) 罰金パラメータ Y_k , X_k , S_k などが簡単な計算式によって直接決定できるので、アルゴリズムがきわめて簡単となり、かつ、信頼性もよい。3) SLP と同様に、設計変数が最適解から大きくはなれている場合には、制約条件の線形近似の精度が悪く、極端な改良を行なうことがある。また、たわみ制限などの曲面上に最適解が存在する場合には、その近傍で解が振動する。従って、解を順調に最適解に収束させるためには、SLP と同様に adaptive move limit の制約を考慮する必要がある。

参考文献 1) M.C. Biggs: Constrained minimisation using recursive equality quadratic programming: in 'Numerical methods for nonlinear optimisation', (ed. F.A. Lootsma) Academic Press (1972) 2) R. Fletcher: A general quadratic programming algorithm: J. Inst. Maths. Appls. 7, (1971)

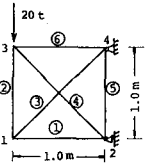


図-1



図-2

表-1

部材 No.	$\delta_a = 0.30 \text{ cm}$						$\delta_a = 0.25 \text{ cm}$						$\delta_a = 0.20 \text{ cm}$					
初期値	10.0	5.0	11.0	6.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0
最適値	10.0	5.0	7.0	15.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0
$A_{opt} \text{ (cm}^2\text{)}$	10.0	5.0	9.0	14.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0	10.0	5.0
最小重量 (kg)	6091.8	6088.1	6091.2	6090.5	6113.5	6114.2	7603.5											
反復回数	12	12	14	13	17	14	19											

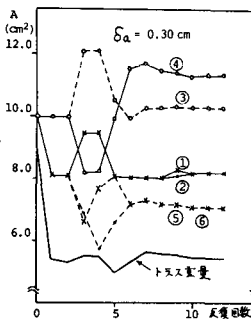


図-3 収束状況

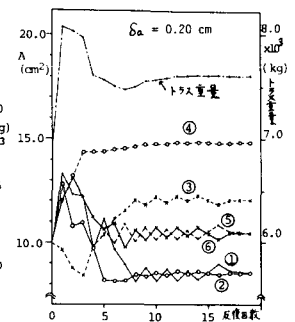


図-4 収束状況