

(株) 神戸製鋼所 正員 ○ 豊島 史郎
中面 宏
渡田 凱夫

1. まえがき 近年、穀物や石炭などの粉粒体を貯蔵するための大型貯槽が建設される機会がふえており、貯槽自体の応力解析手法については種々の報告がなされている。しかし、そのような解析の前提となるべき粉粒体圧（粉粒体の流れのパターンに依存する⁽¹⁾⁽⁴⁾）による外力条件はそれほど明確にはされていないようである。本研究は、サイロなどの容器から粉粒体を排出する時の、粉粒体の特性（すべり線の形成状態や応力分布など）を大局的に把握するための一簡易解析手法を示すものである。そこで、一つのすべり線を想定してすべり線上の応力場の離散化を行ない、最小二乗法を用いて有限要素法的にすべり線を求めている。

2. 塑性流動時の応力場とすべり線 定常塑性流動時における粉粒体の降伏条件を、Jenikeにより提案された有効内部摩擦角 ϕ_0 を用いて

$$|\tau| = \sigma \cdot \tan \phi_0 \quad (1) \quad \text{と表わす。}$$

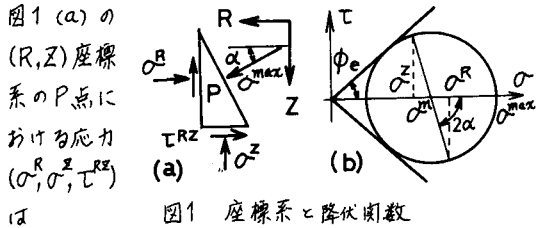


図1 座標系と降伏関数

$$\left. \begin{aligned} \sigma^R &= \sigma^m \{ 1 + \sin \phi_0 \cdot \cos(2\alpha) \} \equiv \sigma^m \cdot S^R(\alpha) \\ \sigma^Z &= \sigma^m \{ 1 - \sin \phi_0 \cdot \cos(2\alpha) \} \equiv \sigma^m \cdot S^Z(\alpha) \\ \tau^{RZ} &= \sigma^m \cdot \sin \phi_0 \cdot \sin(2\alpha) \equiv \sigma^m \cdot S^T(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と表わされ、これをつり合い式

$$\left. \begin{aligned} \partial \sigma^R / \partial R + \partial \tau^{RZ} / \partial Z &= 0 \\ \partial \tau^{RZ} / \partial R + \partial \sigma^Z / \partial Z - \gamma &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

に代入すると、塑性論よりすべり線の方程式が

$$dZ/dR = \tan(\alpha \mp \eta) \quad (4)$$

と与えられる。また、このすべり線に沿う応力は

$$d\sigma^m \mp 2\sigma^m \tan \phi_0 \cdot d\alpha = \gamma (dZ \mp \tan \phi_0 \cdot dR) \quad (5)$$

と表わされる。ここに、 $\eta = \pi/4 - \phi_0/2$ 、 σ^m は平均応力、 α は R 軸から最大主応力 σ^m への角度、 γ は単位

重量であり、式(4),(5)で示されるすべり線のうち上側の符号によるものをオ1-slip line, 下側の符号によるものをオ2-slip line と名づける。

3. 応力の離散化 図2に示すように一つのすべり線を想定し、それを $(N+1)$ 個の点により N 個の区間に分割する。オi点の座標と応力特性値をそれぞれ (R_i, Z_i) 、 (σ_i^m, α_i) とし、オi区間すなわち (R_i, Z_i) から (R_{i+1}, Z_{i+1}) の区間に対して式(5)のすべり線の応力特性方程式を適用する。ここで、オi区間の平均応力 $\overline{\sigma_i^m}$ は一変と仮定して σ_i^m と σ_{i+1}^m の平均値を用い、式(5)を積分すると

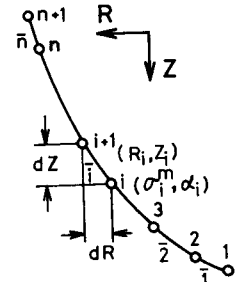


図2 すべり線

$$R: R_{i+1} - R_i = 2\overline{\sigma_i^m} \frac{\sin \phi_0}{\gamma} \{ f^j(\alpha_{i+1}) - f^j(\alpha_i) \} \quad (6)$$

$$Z: Z_{i+1} - Z_i = 2\overline{\sigma_i^m} \frac{\sin \phi_0}{\gamma} \{ g^j(\alpha_{i+1}) - g^j(\alpha_i) \} \quad (7)$$

$$\overline{\sigma_i^m} = (\sigma_{i+1}^m + \sigma_i^m) / 2 \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} f^j(\alpha_i) &= \alpha_i \cdot \cos(2\eta) + (-1)^j \cdot \sin(2\eta) \ln |\cos[\alpha_i - (-1)^j \eta]| \\ g^j(\alpha_i) &= (-1)^j \alpha_i \cdot \sin(2\eta) - \cos(2\eta) \cdot \ln |\cos[\alpha_i - (-1)^j \eta]| \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

($j=1, 2$ であり j -slip line を示す)

となり、オi区間の両端点における座標と応力の関係が得られる。

4. 最小二乗法によるすべり線の推定

ここでは各区間を直線(差角)近似し、各区間におけるつり合いの二乗誤差和が最小となるようにすべり線を推定する。オi区間におけるR, Z方向のつり合い誤差を E_i^R 、 E_i^Z 、誤差の二乗和を E_i と置く

$$\left. \begin{aligned} E_i^R &= \Delta \sigma_i^R / \Delta R_i + \Delta \tau_i^{RZ} / \Delta Z_i \\ E_i^Z &= \Delta \tau_i^{RZ} / \Delta R_i + \Delta \sigma_i^Z / \Delta Z_i - \gamma \\ E_i &= \{ (E_i^R)^2 + (E_i^Z)^2 \} \cdot \Delta R_i \Delta Z_i \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となる。式(2),(6),(7)を式(10)に代入して整理すると、 E_i は

$E_i = A_i^1 (\sigma_i^m)^2 + A_i^2 (\sigma_i^m \sigma_{i+1}^m) + A_i^3 (\sigma_{i+1}^m)^2$ (11)
と表される。よって、すべり線における二乗誤差和を最小とする各点間の方程式は

$$\begin{Bmatrix} 2A_i^1 & A_i^2 \\ A_i^2 & 2A_{i+1}^1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_i^m \\ \sigma_{i+1}^m \end{Bmatrix} \equiv A_i \cdot \sigma_i^m = 0 \quad (12)$$

となる。ここに

$$A_i^k = \sum_{j=1}^n a_{k,j} \cdot e_j \quad (k=1, 2, 3)$$

$$e_1 = \frac{f_{i+1,i}^j}{g_{i+1,i}^j}, e_2 = \frac{1}{e_1}, e_3 = 2 \cdot e_4 = \sin^2 \phi_e \cdot \left\{ f_{i+1,i}^j \cdot g_{i+1,i}^j \right.$$

$$a_{11} = (S_{i+1}^x)^2 + (S_{i+1}^y)^2, a_{12} = (S_{i+1}^x)^2 + (S_{i+1}^y)^2$$

$$a_{13} = 2 S_{i+1}^x \sin \phi_e \cdot \{ f_{i+1,i}^j \cdot S_{i+1}^x + g_{i+1,i}^j \cdot S_{i+1}^y \}, a_{14} = 1$$

$$a_{21} = -2 (S_{i+1}^x \cdot S_{i+1}^y + S_{i+1}^y \cdot S_{i+1}^x), a_{22} = -2 (S_{i+1}^x \cdot S_{i+1}^y + S_{i+1}^y \cdot S_{i+1}^x)$$

$$a_{23} = -2 (S_{i+1}^x \cdot S_{i+1}^y - \sin \phi_e \cdot \{ f_{i+1,i}^j \cdot (S_{i+1}^x - S_{i+1}^y) + g_{i+1,i}^j \cdot (S_{i+1}^y - S_{i+1}^x) \}), a_{24} = 2$$

$$a_{31} = (S_{i+1}^x)^2 + (S_{i+1}^y)^2, a_{32} = (S_{i+1}^x)^2 + (S_{i+1}^y)^2$$

$$a_{33} = 2 S_{i+1}^x \sin \phi_e \cdot \{ f_{i+1,i}^j \cdot S_{i+1}^x + g_{i+1,i}^j \cdot S_{i+1}^y \}, a_{34} = 1$$

$$f_{i+1,i}^j \equiv f^j(d_{i+1}) - f^j(d_i), g_{i+1,i}^j \equiv g^j(d_{i+1}) - g^j(d_i)$$

$$S_i^x \equiv S^x(\alpha_i) \quad (X=R, Z, T)$$

である。なお、式(6)、(7)より

$$R: R_{n+1} - R_1 = \sum_{i=1}^n (\sigma_i^m + \sigma_{i+1}^m) \frac{\sin \phi_e}{\gamma} \{ f^j(d_{i+1}) - f^j(d_i) \} \quad (14)$$

$$Z: Z_{n+1} - Z_1 = \sum_{i=1}^n (\sigma_i^m + \sigma_{i+1}^m) \frac{\sin \phi_e}{\gamma} \{ g^j(d_{i+1}) - g^j(d_i) \} \quad (15)$$

間の関係があり、 σ_i^m ($i=1, 2, \dots, n+1$) のうち一つは従属となり、式(11)、(12)において考慮する必要があるので。

すべり線を決める方程式は、式(12)と重ね合わせることににより

$$A \cdot \sigma^m = X$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma^m &= \{\sigma_1^m, \sigma_2^m, \dots, \sigma_n^m, \sigma_{n+1}^m\}^T \\ X &= \{0, 0, \dots, 0, X_{n+1} - X_1\}^T \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

($X=R$ または Z)

となり、 σ^m を式(6)、(7)に代入することにより座標(R_i, Z_i)が決まる。なお A は α_i の関数である。

4. 数値計算例

図3に示すような幅 $2R_w$ 、排出幅 $2R_o$ の平底容器(平面モデル)から粉粒体を排出した場合に観測される死領域と流動域の境界線を上記手法により推定している。死領域が形成されるような緩流域では粉粒体は受動応力状態、境界

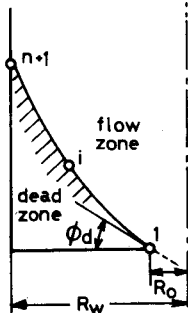


図3 平底容器

線はすべり線と考えられ、それは R_o, R_w を通るので式(14)が適用できる。ところで、粉粒体の有効内部摩擦角 ϕ_e と容器の摩擦角 ϕ_w より α_1 と α_{n+1} に関してはある程度推定できるが、 α_i ($i=2, \dots, n$) は未定である。そこで、境界線は単調になめらかであるという仮定を設けて、 α_i はすべり線上で単調に増加または減少するとして α_1 と α_{n+1} の中間値を採用することにする。ここでは、

Gardner³⁾の実験結果に適

用してみる。粉粒体を

容器壁に付着させ、壁面

でのすべりが起こらない

ような条件であったため

$$\alpha_{n+1} = (\phi_e + \pi/2)/2$$

$$\alpha_1 = (\phi_e + 2\phi_w - \pi/2)/2 \quad (17)$$

と置ける。ここに、 ϕ_e

は図3に示す排出角であ

る。また、文献3)で

述べられているように、

ϕ_e と ϕ_d の関係を簡便に

$$\phi_e \approx \phi_d \quad (18)$$

と置く。図4は、

Gardnerの実験結果と本

法による計算結果であり、

実験結果を比較的良好に推定できている。なお、 $\phi_d=40^\circ$ 、

$R_o/R_w = 0.079$ である。

5. あとがき 排出時における容器内の粉粒体の荷

性を調べる一簡易解析手法を述べ、数値計算例により、

平底ビンの死領域境界線の推定を行ないある程度妥当な

結果を得た。今後、ホッパーを有する容器などに適用

するとともに、種々の実験を行ない粉粒体の流動特性を

検討する予定である。

参考文献

- 1) Jenike, A.W., J.R. Johanson: Bins Loads, Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 94, No. ST4, 1011 (1968)
- 2) Sokolovski "Statistics of Granular Media", Pergamon Press, Oxford, 1965
(星壁・佐藤訳「土のような粒状体の工学」, オーム社, 昭和37年)
- 3) Gardner, G.C., Chem. Eng. Sci., vol. 21, 261 (1966)
- 4) 高橋孝志, 柳野弘, 化学工学, 38巻, 10号, 746 (1974)
- 5) Tüzün, U., R.M. Nedderman, Powder Technol., 31, 27 (1982)

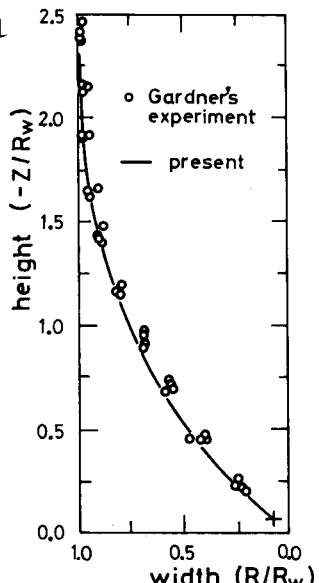


図4 死領域の境界線