

東京工業大学 正 野村 卓史
東京工業大学 正 吉田 裕

1. はじめに

有限要素法による非圧縮粘性流体の解法の中で、流速と圧力を変数とする方法は、一般に、圧力の評価、非圧縮連続条件の評価に関して困難をともなう。昨年、著者らは、高精度な特性を有する直接時間積分法を基にした独自の解法を発表した¹⁾。この解法は、高い Reynolds 数の領域においても安定で、圧力、連続条件についても相当信頼し得る解を得るこゝができるものであるが、その反面、逆行列計算を必要とするために、少ない自由度の問題しか解き得ないものであった。そこで、元の解法の長所をできる限り損なうことなく、かつ多自由度な問題を解くことができることを目的として、逆行列計算を含まず、連立方程式を解くだけで解を得ることができるアルゴリズムを新たに構成したので、ここに発表する。

2. アルゴリズム構成の過程

本解法は、次に示すような、流速と圧力を変数とする非圧縮粘性流体の有限要素方程式を対象とする。

$$\text{運動方程式: } M \frac{dU}{dt} + K U = f - K_p P - \bar{K} U \equiv R \quad (1)$$

$$\text{連続方程式: } K_p^T U = 0 \quad (2)$$

ここで、 U は節点流速のベクトル、 f は節点力のベクトル、 P は圧力変数のベクトルである。 M は密度に関するマトリックス、 K は粘性に関するマトリックス、 K_p は空間に関する勾配を評価するマトリックス、 $\bar{K} = \bar{K}(U)$ は対流項に関する非線形マトリックスである。連続方程式(2)は、領域全体の節点流速に関する方程式である。したがって U には境界条件として既知の成分が含まれている。ここで流速の境界条件に対応させて、次のように記号の定義を行う。

$$U = \begin{Bmatrix} U^I \\ U^{\bar{I}} \end{Bmatrix}, \quad f = \begin{Bmatrix} f^I \\ f^{\bar{I}} \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} b^I \\ b^{\bar{I}} \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A^I \\ A^{\bar{I}} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_I & 0 \\ 0 & M_{\bar{I}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで添字 I は未知流速 U^I に対応する自由度であることを意味し、添字 $\bar{I}$ は既知流速 $U^{\bar{I}}$ に対応する自由度であることを意味する。 b はベクトル一般、 A はマトリックス一般を表している。これらの区別を明確にすることが解法構成上の要である。なお、以下の展開では M^{-1} が不可欠なので、 M については *lumping* して対角マトリックスとした。

式(1)に著者らの提案する直接時間積分法(1要素公式)²⁾を適用すると、時刻 t_n から t_{n+1} ($=t_n + \Delta t$) への1ステップの積分に関して、次の関係式が得られる。

$$K_{II} \phi_n = M_{II} U_n + \frac{\Delta t}{3} R_n + \frac{\Delta t}{6} (f_{n+1} - K_p R_{n+1} - \bar{K}_{n+1} U_{n+1}) \quad (4)$$

$$M_{II} U_{n+1} = \frac{\Delta t}{6} R_n + \frac{\Delta t}{3} (f_{n+1} - K_p R_{n+1} - \bar{K}_{n+1} U_{n+1}) - K_{II} \phi_n \quad (5)$$

$$\text{こゝに、} \quad K_{II} = \frac{\Delta t}{3} K M^{-1} K^T + K + \frac{1}{\Delta t} M, \quad K_{II} = \frac{\Delta t}{6} K M^{-1} K^T - \frac{1}{\Delta t} M, \quad R_n = f_n - K_p R_n - \bar{K}_n U_n \quad (6)$$

積分の基本的なアルゴリズムは、式(4)を解いて媒介変数 ϕ_n を求め、これを式(5)に代入して U_{n+1} を求めるというものである。ただし、式(4)の右辺には未知変数 f_{n+1} 、 R_{n+1} 、 U_{n+1} が含まれているため、以下に示すような過程により、これらの項を処理していく。

まず式(5)に時刻 t_{n+1} における連続条件 $K_p^T U_{n+1} = 0$ を適用し、連続条件を満足する流速 U_{n+1} に対応した圧力

P_{i+1} を求める式を導く。

$$\frac{4t}{3} K_p^T M^T K_p P_{i+1} = K_p^T M^T \left[\left\{ \frac{4t}{6} \bar{r}_i + \frac{4t}{3} (\bar{f}_{i+1} - \bar{K}_{i+1} u_{i+1}) \right\} - K_{21} \Phi_i \right] \quad (7)$$

また, M が対角マトリックスであることを考慮に入れると, 式(5)は次のように変形できる。

$$u_{i+1}^I = M^{-1} \left[\left\{ \frac{4t}{3} \bar{f}_{i+1}^I + \frac{4t}{6} \bar{r}_i^I - \frac{4t}{3} (K_p^I P_{i+1} + \bar{K}_{i+1}^I u_{i+1}^I) \right\} - K_{21}^I \Phi_i \right] \quad (8)$$

$$\bar{f}_{i+1}^I = \frac{3}{4t} \left[M_{II} u_{i+1}^I - \frac{4t}{6} \bar{r}_i^I + \frac{4t}{3} (K_p^I P_{i+1} + \bar{K}_{i+1}^I u_{i+1}^I) + K_{21}^I \Phi_i \right] \quad (9)$$

式(9)を用いることにより, 式(4), (7)中の $\bar{f}_{i+1}$ を消去することができ, これにより, 最終的には次のような関係式を得ることがができる。

$$\begin{bmatrix} K_{11}^I & \frac{4t}{6} K_p^I \\ K_{11}^I - \frac{1}{2} K_{21}^I & 0 \\ \hline K_p^{IT} M^{-1} K_{21}^I & \frac{4t}{3} K_p^T M^T K_p^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ P_{i+1} \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{Bmatrix} \frac{4t}{3} \bar{r}_i^I \\ \frac{4t}{6} \bar{r}_i^I \end{Bmatrix} - \frac{4t}{6} \begin{bmatrix} K_{11}^I \\ 0 \end{bmatrix} u_{i+1}^I + \begin{Bmatrix} M_{II} u_{i+1}^I \\ M_{II} (\bar{u}_i^I + \frac{1}{2} \bar{u}_{i+1}^I) \end{Bmatrix} \right\} \quad (10)$$

式(10)および(8), (9)が本解法を構成する方程式である。

具体的な計算過程においては, まず非線形項 $\bar{K}_{i+1} u_{i+1}$ を近似して, 式(10)により Φ_i , P_{i+1} を求める。次にこれを式(8), (9)に代入して u_{i+1}^I , $\bar{f}_{i+1}^I$ を求め, 得られた u_{i+1}^I に基づいて非線形項を再評価し, 流速の値が収束するまでこの過程を繰返して1ステップの計算を完了する。

式(10)左辺の係数マトリックスは非対称で, かつ相当複雑であり, これを構成するには時間がかかるが, Δt を変えない限り1回の作成で済むもので, あとは後退代入の繰返しのみで積分計算を進められる。

3. 数値計算例

解法を検証するために, 一様流中の2次元正方形角柱まわりの流れを解析した。境界条件, 諸定数等はFig. 1に示す。初期条件は, $u = v = p = 0$ とし, 作用流速はFig. 2に示すように, 最初の10ステップで目標値 U に到達させ, 以後一定とした。Fig. 3は $Re = 40$ のときの, 時刻50秒 ($\Delta t = 0.1$ 秒) における流速分布である。

4. おわりに

本研究に協力していただいた, 卒業生時田英夫君(理東工科大学院)に感謝いたします。

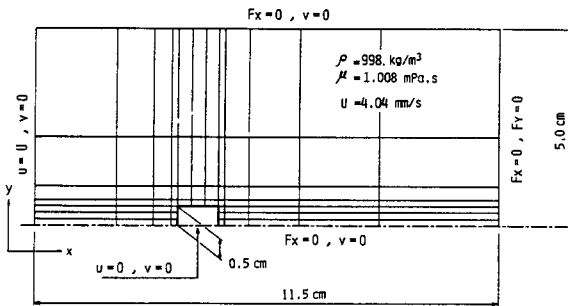


Fig. 1 境界条件等

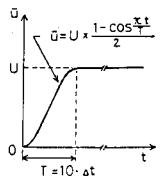


Fig. 2 作用流速

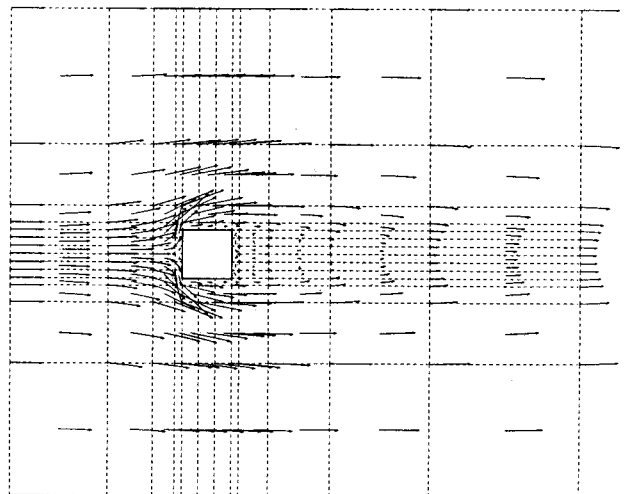


Fig. 3 流速分布 $t = 50 \text{ sec}$ $Re = 40$

参考文献(1) 吉田, 他: 非圧縮粘性流体の有限要素方程式の解法, 日本機械学会マトリックス解析研究発表論文集, 1981, (2) 吉田, 他: 熱伝導型方程式の直接時間積分法と高精度化のアルゴリズム, 工論集, No. 313, 1981