Ⅰ-9　　保存則表示による移動現象問題の一解析法について

(株)協和コンサルタンツ　正　竹内　則雄
東京大学生産技術研究所　正　川井　忠彦
函館工業高等専門学校　　川畑　孝

1．はじめに

移動現象問題の解析は各種の分野の研究者によって検討されてきた。特に流体解析に限っても多種多様な解析法が考えられている。普通，粘性流れを解析する場合，それを支配するナビィエー・ストークスの方程式を離散化する。解析的にこの支配方程式を解くことは，その非線形性のためほとんど不可能であり，古典的には理想化された方程式により解を求めている。一方，計算機の演算能力を利用して直接微分方程式を差分で表現し解析する方法も古くから考えられ，数多くの解析法や解析例が発表されている。[1] ただ，この差分法は演算時間や計算機の記憶容量が少なくてすみ非常に有効な手法である一方，任意形状の境界に対する取り扱いが煩雑になる傾向にある。また構造工学の分野で開発された有限要素法も近年では流体解析にも応用され数々の成果を収めている。有限要素法は変分原理を基礎としているが，粘性流体の場合，この変分原理が存在しないため重み付き残差法の一つであるガレルキン法により離散化を行なっている。[2] この方法で得られる解は弱解であるためスムージングが行なわれ，衝撃波等の解析には不向きであると思われる。渡辺[3]らは以上のような観点から，質量あるいは運動量の保存則を用いる解析法を提案した。ただこの方法はポアソンの方程式を解く必要があり若干の問題点が残されていた。本論文はこの研究の延長であって，繰返し計算を利用し収束計算を行なう方法を示したものである。これにより演算時間の短縮化が期待できる。

2．基礎方程式

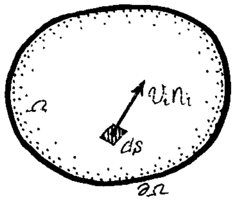
熱を無視すると流れ問題を支配する保存則は以下のように表わされる。

（質量保存則）

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho\,dv=-\int_{\partial\Omega}\rho v_i n_i\,ds \qquad\text{―――――― (1)}$$

（運動量保存則）

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho v_i\,dv=-\int_{\partial\Omega}P v_i n_i\,ds+\mu\int_{\partial\Omega}(v_{i,j}+v_{j,i})n_j\,ds+\int_{\partial\Omega}\rho v_i v_j n_j\,ds \qquad\text{―――――― (2)}$$



n_i：外向き法線ベクトルのi方向の方向余弦
図1　記号の説明

ここで，ρ：質量，t：時間，v_i：速度ベクトルのi方向の成分，p：圧力，μ：粘性係数であり，$P=p+\frac{2}{3}\mu\Theta$（$\Theta=v_{i,i}$）である。

3．数値計算法

上記(1)式において非圧縮性流体を仮定すれば時間微分項を省略することができ，結局非圧縮性流体における連続の式を得ることができる。しかし，この連続の式があるために方程式の性質が悪くなり，数値計算を面倒にしている。そこで考えられるのが連続の式を近似的に満足させる方法で，近年ではこの方法が主になっている。[1]
ここでは文献1)に示されている差分法の技法を保存則に適用し簡略的な方法により計算を行なう。時間に関してオイラーの差分式を用いるなら，運動方程式は以下のようになる。

$$\int_{\Omega}\tilde{v}_i^{(n+1)}dv=\int_{v}v_i^{(n)}dv-\Delta t\left\{\int_{\partial\Omega}v_i^{(n)}v_j^{(n)}n_j\,ds+\int_{\partial\Omega}p^{(n)}n_i\,ds-\nu\int_{\partial\Omega}v_{i,j}^{(n)}n_j\,ds\right\} \qquad\text{―――――― (3)}$$

ここで，上付きの添字は時間ステップを示し，Δtは増分時間を示す。またνは動粘性係数を示している。

さて，このままでは連続の方程式を満足していないので，以下のような収束計算を考える。[1]

$$\int_\Omega \Delta t\cdot \frac{p_{,jj}^{(n+1)}}{\rho}\, dv = \int_{\partial\Omega} \tilde{v}_j^{(n+1)} n_j\, ds \qquad (4)$$

$$\int_\Omega v_i^{(n+1)} dv = \int_\Omega \tilde{v}_i^{(n+1)} dv - \int_{\partial\Omega} \Delta t\cdot \delta p^{(n+1)} n_i\, ds \qquad (5)$$

ここで，δp は連続の式の満足度を示す圧力の修正項である。すなわち，

$$\delta p = \int_{\partial\Omega} \tilde{v}_j n_j\, ds \qquad (6)$$

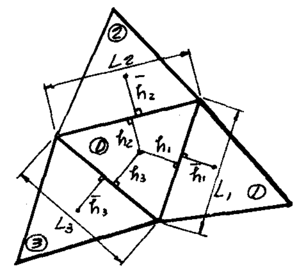


図2　自由度と垂線

である。このようにして，連続の式が満足されるまで(4)と(5)の繰返し計算を行ない，満足された段階で(3)の運動方程式にもどり次の時間ステップへと計算を移す。このように(3)〜(5)式を解くために図2に示される記号を用いて離散化を行なう。

(3)式：
$$\tilde{v}_i^{(n+1)} = v_i^{(n)} - \frac{\Delta t}{\Delta}\Big[\sum_\alpha^3 \{\delta v_i^{(n)} + (1-\delta) v_{\alpha i}^{(n)}\} \frac{\bar h_\alpha v_j^{(n)} + h_\alpha v_{\alpha j}^{(n)}}{h_\alpha + \bar h_\alpha} \cdot n_{\alpha j} L_\alpha + \sum_\alpha^3 \Big(\frac{\bar h_\alpha p^{(n)} + h_\alpha p_\alpha^{(n)}}{h_\alpha + \bar h_\alpha}\Big) n_{\alpha i} L_\alpha - \nu \sum_\alpha^3 \Big\{\frac{L_\alpha}{h_\alpha + \bar h_\alpha} (v_{\alpha i}^{(n)} - v_i^{(n)})\Big\}\Big] \qquad (7)$$

ここで，δ はある辺を流入する場合 $\delta = 1$，流出する場合 $\delta = 0$ とする。

(4)式：
$$p^{(n+1)} = \Big[\sum_\alpha^3 \Big(\frac{\Delta t\cdot L_\alpha}{h_\alpha + \bar h_\alpha}\Big) p_\alpha^{(n)} - \sum_\alpha^3 \Big(\frac{\bar h_\alpha \tilde{v}_j^{(n+1)} + h_\alpha \tilde{v}_{\alpha j}^{(n+1)}}{h_\alpha + \bar h_\alpha}\Big) n_{\alpha j} L_\alpha\Big] \Big/ \sum_\alpha^3 \Big(\frac{\Delta t\cdot L_\alpha}{h_\alpha + \bar h_\alpha}\Big) \qquad (8)$$

(5)式：
$$v_i^{(n+1)} = \tilde{v}_i^{(n+1)} - \frac{\Delta t}{\Delta}\sum_\alpha^3 \Big(\frac{\bar h_\alpha \delta p^{(n+1)} + h_\alpha \delta p_\alpha^{(n+1)}}{h_\alpha + \bar h_\alpha}\Big) n_{\alpha i}\cdot L_\alpha \qquad (9)$$

(7)式〜(9)式が解くべき方程式である。上式に表われる下付きの添字 α は要素番号を示しており，無添字のものは要素番号①のものを示している。Δ は三角形要素①の面積である。

4. 数値計算例

数値計算例として最も基本的で解析解のある二次元ポアズイユの流れを考えた。境界条件その他は図3に示されるとおりである。図4は計算結果で流速分布が示してある。増分時間 Δt は 0.02 秒とした。図は，100 回の繰返し（時間）計算後のものであるが，ほぼ収束している。

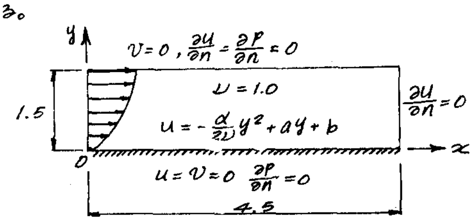


図3.　境界条件

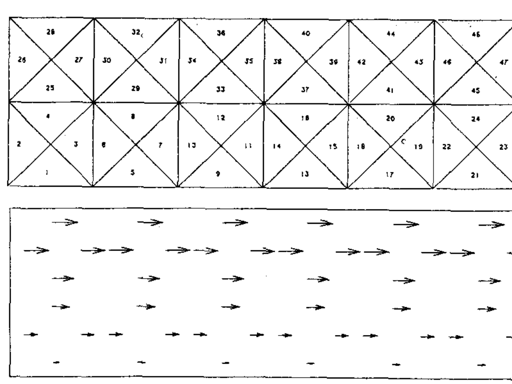


図4. 計算結果

5. むすび

保存則表示による粘性流体の解析法を示した。本法は収束計算回数を減少させるためにファクターを必要とする。現在のところ，このファクターをいくらにとるかによって計算回数が変動するため実用的に用いることはできない。移動現象問題の場合，各種の解析手法を再検討し整理をやり直おす必要がある。本法はそのような場合の一手法として考えたものである。

参考文献

1) C.W. Hirt et al : "SOLA-A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flow", Los Alamos Scientific Lab., LA-5852 (1975)
2) M. Kawahara : "Study and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid", F.E.M. in fluid Vol.3 (1978)
3) 川井・渡辺：“流体力学諸問題の一離散化解析（その1）” 日本造船学会論文集 (1979)