

岡山大学 大学院 学生員 ○伊藤恭平

岡山大学 工学部 正 員 谷口健男

ハ雲建設コンサルタント 兼井敏雄

1. まえがき 有限要素法を用いて構造解析を行なうと、最終的には連立1次方程式を解く問題に帰着することが多い。その解法としてガウス＝ザイデル法(G.S.法)が用いられることがあるが、解が収束するまでの演算時間が分らないという不安材料もかかえている。本研究では、収束反復回数に影響を及ぼす要因を数値実験によりひろい出し、その結果を用いて収束反復回数の提案を行なう。

2. G.S.法の特性 連立1次方程式 $AX = b$ をG.S.法を用いて解くと、その反復回数は、収束行列 $M = (D - E)^{-1}F$ のノルム $\|M\|$ に依存する。但し、 E 、 D 、 F はそれぞれ行列 A の左下3角行列、対角行列、右下3角行列である。また証明は省くが、解の精度を1桁上げるのに必要な反復回数は一定である。実際に数値実験を行なうと、後で述べる種々の要因により、演算当初は安定していない。以下、定常状態にあるときに、精度を1桁上げるために必要な反復回数を ΔIT 、定常状態になる以前の反復回数を F_0 とする。G.S.法を用いて解く場合、解が収束に到るまでの反復回数は、扱う構造系によって異なってくるはずである。そこで考えられるであろう全ての構造系の特性を以下に挙げる。1. 節点数 2. 係数行列の行間(列間)の要素の大きさの違い 3. メッシュパターンの違い 4. いくつかのメッシュパターンの混在 5. 境界条件 6. 荷重の大きさ 7. 荷重点の位置 8. 収束判定条件 9. 初期値 解が収束に到るまでの反復回数に影響を及ぼす上記要因について数値実験を行なった結果、いわゆる境界条件が反復回数を支配し、元数の増加は反復回数をほとんど一定に増加させるにすぎず、収束判定条件 EPS がある程度以上になれば、精度を1桁上げる時の反復回数は一定値となるということがわかった。以上より、G.S.法の使用者が指定した収束判定条件を満足するまで解が収束するのに要する反復回数、 IT は次式で表わされる。 $IT = F_0 + m \cdot \Delta IT$ —— (1) 但し、 m は反復が定常状態にある収束判定条件のステップ数とする。更に、 F_0 、 ΔIT を決定する要因として、 F_0 : 境界条件、荷重の大きさ、荷重点の位置、収束判定条件、初期値、 ΔIT : 境界条件である。(1)式で F_0 はこれまでの数値実験からも、また上述してあるような種々の要因から、構造系を見て、どの程度の値をとるかを予測するのは容易でない。しかし、いま最後の収束判定条件を $EPS = 10^{-m}$ とすれば、反復回数 IT は次式をもって上限をおさえることができる。 $IT < m' \cdot \Delta IT$ —— (2) 従って ΔIT が予測できれば IT も上限ではあるが予測することができる。

3. 反復回数の予測 ここでは、 ΔIT を求めるために行なった数値実験、その結果から得られる ΔIT の予測式を導き出す。まず、図-1の1次元モデルについて数値実験を行なった。50節点のうち、1節点、2節点、3節点、4節点そして全節点を拘束した場合について数値実験を行なった。その結果より、拘束点から最も遠い節点と拘束点までの距離を最遠距離とすると、 ΔIT は(最遠距離)² と比例関係にあり、結局1つの節点に注目すれば良いという結果になった。対象が2次元領域(以後2次元モデルと呼ぶ)の場合に、1次元モデルの結果の拡張を行なう。最も簡単な場合として、四辺固定の境界条件を有する正方形領域に対する数値実験より、 ΔIT が境界より最遠点、即ち中央点までの距離の二乗に比例するという結果を得る。次に、境界条件をそのままにして、領域を長方形とすると、上記結論である最遠距離と、辺比が ΔIT を支配することが結果として得られる。このことより、解の収束をほとんど決定するのではないかと考えられる範囲をモデル上に定義する。まず4辺固定について考えてみる。 ΔIT が図-2に示される斜線部分の面積に等しくなるように r を決定する。正方形領域の場合、即ち $H = B$ の場合、数値実験の結果より $r \approx \frac{1}{2}$ 。また、総節点数即ち連立1次方程式の元数がほとんど同じで r/B が異なる数値実験を行なうと、 r/B が大きくなれば、 ΔIT は減少していくということが分かった。以上のような境界条件が4辺固定で行なった数値実験の結果より辺比 r/B ($=k$) により ΔIT が異な

ということと言える。つまり ΔIT を k の関数で表わすことが可能である。そこで $r_1 = k/(k+1)$, $r_2 = k^2/(k^2+1)$ (このようにすれば $k=1$ の場合 $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ となる)として計算される ΔIT を ΔIT_1 , ΔIT_2 とすれば、次のようになる。

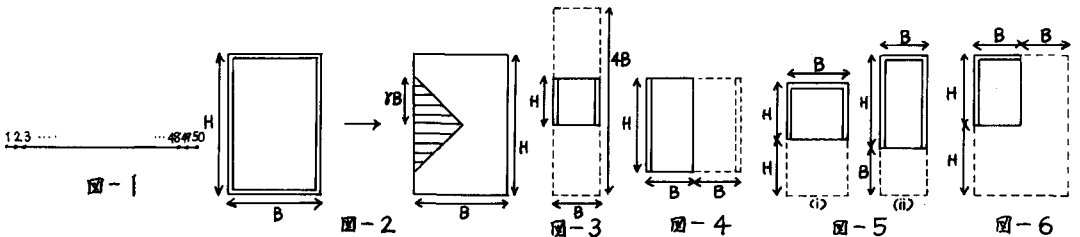
$$\Delta IT_1 = r_1 B \times \frac{B}{2} = \frac{k}{2(k+1)} B^2, \quad \Delta IT_2 = r_2 B \times \frac{B}{2} = \frac{k^2}{2(k^2+1)} B^2 \quad \text{--- (3)}$$

このようにして予測する ΔIT および数値実験の結果を表-1に示す。周辺領域が正方形の場合は、 $\Delta IT_1 = \Delta IT_2$ となり実際の ΔIT よりも少し大きめの値を示す。また周辺領域が長方形の場合は ΔIT_1 と ΔIT_2 の関係が次のようになっていることがわかる。 $\Delta IT_1 < \Delta IT < \Delta IT_2$ --- (4) 従って $\gamma = (r_1 + r_2)/2$ として ΔIT を予測すれば実際の ΔIT に近い値を示すのではないかと考え、この γ を用いた計算結果を表-1に示す。これより、周辺領域が正方形の場合は r_1, r_2 で計算した場合と同様の結果になるが、長方形領域の場合は明らかに r_1, r_2 の場合よりも、実際に近い値をとっていることが分る。従って4辺固定の場合は次式をもって ΔIT の予測を行なうとする。

$$\Delta IT = \gamma B \times \frac{B}{2} = \frac{k(2k^2 + k + 1)}{4(k+1)(k^2+1)} B^2 \quad \text{--- (5)}$$

次に他の境界条件を考える。上述したように、境界の ΔIT に対する影響は、十分遠い境界は、ほとんどないこと、また ΔIT は境界への距離に支配されることを考えると、他の境界条件は全て十分遠い所に、固定条件を導入することにより、四週固定の長方形領域に置換できると推論される。対辺固定では、図-3の置き換えにより、四週固定に置き換えられ、この置き換えられた系に対し、(5)式を適用すればよい。但し、 $H/B \geq 4$ のときはそのまま(5)式を適用してもかまわない。また1辺固定の場合は、1辺固定 $\rightarrow$ 対辺固定 $\rightarrow$ 4辺固定のように置換を行なう。1辺固定から対辺固定への置換は図-4に示す。隣辺固定、3辺固定の場合も同様に図-5、6に示すような置換を行なってから(5)式を適用する。数値実験の結果を表-1に示す。

4. あとがき 以上のようにして長方形領域あるいは正方形領域に対しては、境界条件によって置換を行なえば、すべて(5)式を適用して収束反復回数を予測できる。その他の複雑な境界条件に対しても、上記置換法が成り立つことが確認されている。今度の課題は、例えば三角形領域等の任意形状領域での収束回数の予測であろう。



	N	H	B	$k (= \frac{H}{B})$	ΔIT_1	ΔIT_2	ΔIT	EPS	
								10^{-4}	10^{-5}
四辺固定	49	8	8	1.00	16	16	16	15	15
	144	13	13	1.00	42	42	42	40	40
	324	19	19	1.00	90	90	90	80	85
	144	19	9	2.11	28	33	30	30	30
	319	30	12	2.50	51	62	57	56	58
	451	42	12	3.50	56	67	61	61	62
	N	H'	B'	$k' = \frac{H'}{B'}$	H	B	$k = \frac{H}{B}$	ΔIT	EPS
								10^{-4}	10^{-5}
対辺固定	144	7	19	0.37	76	19	4.00	137	156
	144	11	13	0.85	52	13	4.00	74	75
	144	17	9	1.89	36	9	4.00	35	39
	183	60	4	15.00	60	4	15.00	8	7
一辺固定	144	7	8	0.39	144	36	4.00	564	570
	144	11	12	0.92	96	24	4.00	257	268
	144	17	8	2.13	64	16	4.00	111	120
	183	60	3	20.00	60	6	10.00	17	19
	144	12	12	1.00	24	24	1.00	144	135
	196	14	14	1.00	28	28	1.00	196	180
隣辺固定	144	18	8	2.25	36	16	2.25	98	102
	48	12	4	3.00	24	8	3.00	26	29
	144	12	13	0.92	24	13	1.85	60	60
	196	14	15	0.93	28	15	1.87	80	78
	144	18	9	2.00	27	9	3.00	33	34
	48	12	5	2.40	17	5	4.20	11	11
三辺固定									

表-1