I-7　帯行列法における数値誤差に関する実験的研究

岡山大学工学部　正員　○谷口健男
鴻池組　竹内　整

1．まえがき

有限要素法を含むマトリックス構造解析では　大次元の連立一次方程式を扱うことが多い。直接解法によれば　理論的には厳密解を得られるが，実際には丸め誤差や，桁落ちによる数値誤差が生じ，解の含む数値誤差は許容できない程の大きさになることがある．本研究では，ガウス消去法を用いて大次元の連立一次方程式を解く場合の数値誤差に着目し，誤差に影響を与える要因として，主に構造系の特徴と消去順序の関係を考え，その誤差の傾向を数値実験によって調べて，誤差の発生の少ない消去順序の目安を探る。

2．数値誤差に影響を及ぼす要因と数値実験

ガウス消去法を用いる場合，計算機容量を節約するいろいろな方法があるが，その中でもよく利用される帯行列法では，係数行列の帯幅をできるだけ小さくとるよう節点番号付けを行って計算するのが普通である。これを誤差の面からみると，帯幅が小さいと一般に演算回数が少ないため，おおむね誤差が小さいという傾向がみられるが，同じ帯幅でも誤差に違いがある。これは，係数行列中に誤差に影響をおよぼす様々な要因があるためと考えられる。そこで，構造系モデルの特徴と，その剛性行列よりなる方程式を解くときの消去順序の関係を要因とする誤差の様子を調べる。

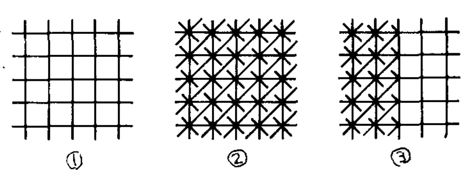
◎数値実験方法　：　数値実験には有限要素法を含むマトリックス構造解析で平均的に現われる構造系モデルを用い，基本的には部材剛度を 1.0 とし，全節点に荷重 1.0 を載荷した。メッシュ・パターンとしては，図－1 に示す3種類を用い，境界条件としては　1). 1辺固定　2). 4周辺固定を用いる。また，ガウスの消去法による演算を行う場合の消去順序は，図－2 に示すものを用いている。

実験は，次の手順で行う。

[ステップ　1]　解くべき構造系モデルの節点に，消去順序に従って番号を付け，全体剛性行列を作る。

[ステップ　2]　帯行列法により連立一次方程式を解く。

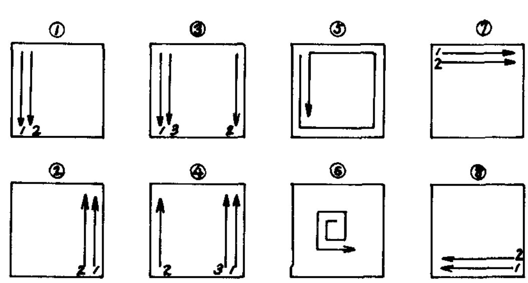
[ステップ　3]　得られた解を初期値として，ガウス＝ザイデル法によりさらに十分収束させ，①．収束解と初期値との差をもって誤差の大小を判定する方法　と　②．ガウス＝ザイデル法による収束演算中に，解が所定の収束判定条件を満たすまでに要する反復計算回数をもって誤差の大小を判定する方法　の2方法で，誤差評価を行った。ただし，オ2の方法で比較する場合，比較する2種以上の直接解を同一の方程式の初期値として収束演算を行った。



図－1．メッシュパターン

◎各要因に対する数値実験

a)．境界条件と消去順序　；　構造系の固定位置と消去順序の関係による誤差を調べると，表1 B が図－3 のようになり，固定端を最後に消去した方が，先に消去したものより誤差が少ない。これは，1)．係数行列の対角項の数値が固定と自由という境界条件により異なる，2)．境界条件の違いが，その行(列)内の非零要素個数の違いとなる　の2つの違いによると考えられる。そこで，次にこの2つの要因に関し2別の数値実験を行う。

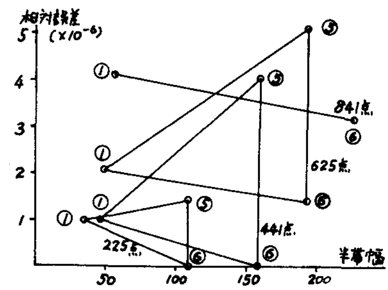


図－2．消去順序

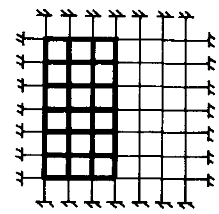
b)．メッシュパターン不均一モデル　；　メッシュパターン

③による実験では表－２のような結果となり，係数行列内非零要素個数の多い行に対応する点から先に消去する方が誤差が少なくなっている。これは「境界条件と消去順序」の項での実験結果と矛盾しない。

c). 係数行列対角項の数値が行によって異なる系 ； 次に，係数行列内の各行の非零要素個数がほぼ一定で，対角項の数値と非対角項非零要素の数値の比，すなわち $|a_{ii}/a_{ij}|$ が行によって違う系として，図-4のようなものを設定し，図中太線の部材の剛性を $1.0 \times R$ とする。この結果は表－３のようになり，$R > 1.0$ では系の左側を先に消去する方が誤差が少なく，$R < 1.0$ のときはその逆になっている。従って，係数行列の $|a_{ii}/a_{ij}|$ が小さい行に対応する点から消去する方が誤差が少ない。



図－3. 帯幅と誤差の関係



図－4. 不均質グリッド

3. 数値誤差減少に関する提言

連立一次方程式をガウス消去法で解く場合の解の数値誤差には，おおむね次のような傾向がみられる。 1). 元数が大きいと誤差が大きい。 2). 係数行列の帯幅が大きいと誤差が大きい。 3). 帯幅が同じでも消去順序によって誤差が異なる。

また，消去順序の選び方による誤差の傾向は次のようである。 1). 対応する行の非零要素数が多い点を先に消去すると誤差が少ない。 2). 対応する行の $|a_{ii}/a_{ij}|$ が小さい点を先に消去すると誤差が少ない。

これを構造系にあてはめて考えると，誤差を少なくするには次のような消去順序を選べばよい。 1). 固定節点に対応する行はそのまわりの節点よりも一般的に非零要素が少なく，そのような場合には固定節点を最後に消去する。 2). 自由端の節点に対応する行では固定端よりも $|a_{ii}/a_{ij}|$ が小さいことがあり，そのような場合には自由端の節点を先に消去する。 3). まわりの節点より固く固定されている節点では $|a_{ii}/a_{ij}|$ が大きいので，他の固定節点よりも後に消去し，まわりの節点よりもやわらかく固定されている節点は他の節点より先に消去する。例えば，帯行列法を用いる場合，等しい帯幅を与える番号付けは複数個存在するので，その中より誤差の小さい番号付けを選べばよいことになる。

この他重要な事柄としては，元数が大きくなればなる程，帯幅の誤差に与える影響が小さくなることが挙げられる。従って系が大きくなれば，上記事項に注意しつつ，容量を最小にする節点番号順序を与え，帯行列法で解けばよいことになる。

	消去順序	帯幅	中央点の誤差		たわみ最大点の誤差		G.S.法による反復回数
			絶対誤差	相対誤差	絶対誤差	相対誤差	
225点,1辺固定	①	31	3.0×10^{-4}	3.3×10^{-6}	4.0×10^{-4}	3.3×10^{-6}	696
$\varepsilon'=1\times10^{-9}$, ΔIT=419	②	31	1.3×10^{-4}	1.4×10^{-6}	3.0×10^{-4}	2.5×10^{-6}	533
225点,4辺固定	①	31	2.0×10^{-5}	1.1×10^{-6}			48
$\varepsilon'=1\times10^{-8}$, ΔIT=60	⑤	111	3.0×10^{-5}	1.6×10^{-6}			68
	⑥	111	0.0×10^{-5}				34
441点,4辺固定	①	43	4.0×10^{-5}	1.1×10^{-6}			94
	⑤	159	1.4×10^{-4}	3.9×10^{-6}			154
$\varepsilon'=1\times10^{-8}$, ΔIT=112	⑥	159	0.0×10^{-5}				68
625点,4辺固定	①	51	1.1×10^{-4}	2.2×10^{-6}			156
	⑤	191	2.6×10^{-4}	5.2×10^{-6}			208
$\varepsilon'=1\times10^{-8}$, ΔIT=157	⑥	191	6.0×10^{-5}	1.2×10^{-6}			151
841点,4辺固定	①	59	2.9×10^{-4}	4.4×10^{-6}			238
$\varepsilon'=1\times10^{-8}$, ΔIT=210	⑥	223	2.1×10^{-4}	3.2×10^{-6}			286

表－１. 境界条件と消去順序の関係と誤差

	消去順序	帯幅	中央点の誤差		たわみ最大点の誤差		G.S.法による反復回数
			絶対誤差	相対誤差	絶対誤差	相対誤差	
225点,4辺固定	①	33	0.0×10^{-5}		1.0×10^{-5}		97
$\varepsilon'=1\times10^{-10}$, ΔIT=59	②	33	0.0×10^{-5}		0.0×10^{-5}		124
441点,4辺固定	①	45	1.0×10^{-5}	5.0×10^{-7}	2.0×10^{-5}	8.0×10^{-7}	189
$\varepsilon'=1\times10^{-9}$, ΔIT=105	②	45	2.0×10^{-5}	1.0×10^{-6}	3.0×10^{-5}	1.0×10^{-6}	215

表－２. メッシュパターンと消去順序の関係と誤差

	消去順序	帯幅	中央点の誤差		たわみ最大点の誤差		G.S.法による反復回数
			絶対誤差	相対誤差	絶対誤差	相対誤差	
225点, R=10.0	①	33	7.0×10^{-6}	7.5×10^{-7}	0.0×10^{-5}		90
	②	33	1.1×10^{-5}	1.2×10^{-6}	1.0×10^{-5}	8.5×10^{-7}	138
$\varepsilon'=1\times10^{-7}$, ΔIT=165	⑧	33	9.0×10^{-6}	9.6×10^{-7}	0.0×10^{-5}		125
225点, R=100.0	①	33	1.6×10^{-5}	2.1×10^{-6}	1.0×10^{-5}	9.1×10^{-7}	258
	②	33	9.0×10^{-5}	1.2×10^{-5}	5.0×10^{-5}	4.6×10^{-6}	1200
$\varepsilon'=1\times10^{-6}$, ΔIT=1360	⑦	33	3.6×10^{-5}	4.7×10^{-6}	2.0×10^{-5}	1.8×10^{-6}	677
441点, R=0.1	①	45	2.0×10^{-4}	3.3×10^{-6}	2.0×10^{-4}	1.6×10^{-6}	143
$\varepsilon'=1\times10^{-8}$, ΔIT=119	②	45	8.0×10^{-5}	1.3×10^{-6}	1.0×10^{-4}	8.0×10^{-7}	118

表－３. 対角項の数値が行によって異なる系の消去順序と誤差