

山梨大学工学部 正員 平島健一
福島工業高等専門学校 正員 〇根岸嘉和

① 緒言 本報告では、現在までに提案されている動的な問題に対する平板理論のうち、代表的な理論を取り上げ、著者らによる General Higher-Order 理論と修正 Baluch-Voyiadjis 理論とを中心として、各理論の系統的な整理・位置づけを行うとともに、数値例を通してそれらの精度面での特徴を明らかにする。

② 各種理論の位置づけ ここでは、各種平板理論の理論的特性に関する相互関係を明確にする一つの試みとして、それらの支配方程式を包含した一般形の支配式を提示し、各理論ごとの支配式を得るための特殊化の過程を表で整理するなどして位置づけを行う。

(面外挙動の支配方程式：一般式)

$$Q_{x,x} + Q_{y,y} = -p + k \rho \ddot{w}_0 - \frac{\nu \rho}{2E} \dot{M} + \frac{9k^2 \rho}{160E} \ddot{P} - \frac{7k^2 \rho^2}{480E} \ddot{\ddot{w}}_0,$$

$$Q_x - \frac{k^2}{12R} \nabla^2 Q_x + D \nabla^2 w_{0,x} = - \left\{ \frac{k^2(1+\nu)}{12k(1-\nu)} - \frac{k^2 \nu}{10(1-\nu)} \right\} p_{,x} - \frac{k^2 \rho}{12kG} \ddot{Q}_x \\ + \left\{ \frac{k^2}{12} + \frac{k^2(1+\nu)}{12k(1-\nu)} - \frac{k^2 \nu}{60(1-\nu)} + \frac{11k^5}{13440(1-\nu^2)} \nabla^2 \right\} \rho \ddot{w}_{0,x} - \frac{(621+555\nu)k^2}{40320E} \ddot{\ddot{w}}_{0,x} \\ + \frac{D}{R} \nabla^2 M_{,x} - \frac{D}{T} \nabla^2 p_{,x} - \frac{k^2 \nu(3+\nu)}{40(1-\nu)} \frac{\rho}{E} \ddot{M}_{,x} + \frac{k^2(191-61\nu)}{22400(1-\nu)} \frac{\rho}{E} \ddot{p}_{,x}, \text{ etc}$$

$$\frac{1}{1+\nu} M - \frac{D}{R} \nabla^2 M = -D \nabla^2 w_0 - \left\{ \frac{12D}{5ER} + \frac{D}{T} \nabla^2 \right\} p + \frac{D}{S} \left\{ k \rho \ddot{w}_0 - \frac{\nu \rho}{2E} \dot{M} + \frac{9k^2 \rho}{160E} \ddot{P} \right. \\ \left. - \left\{ \frac{\nu}{30(1-\nu^2)} - \frac{11k^5}{13440(1-\nu^2)} \nabla^2 \right\} \rho \ddot{w}_0 - \frac{7k^2 \rho^2}{480SE} \ddot{\ddot{w}}_0 \right\},$$

$$\text{ここに } D = Ek^3/12(1-\nu^2), R = 10Ek/3\nu, T = 1120E/39k,$$

$$S = 5ER/12(1+\nu), \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, M = M_x + M_y \text{ (曲げモーメント和)}$$

(一般式の特化と各種の平板理論)

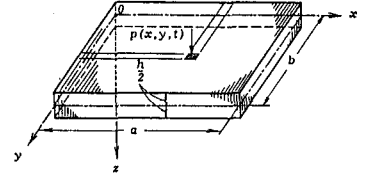
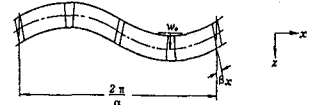
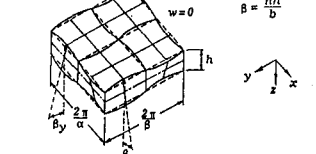


Fig. 1: Geometry of rectangular plate and rectangular Cartesian coordinate system (x, y, z).

(A-I) flexural



(A-II) thickness-twist



(A-III) thickness-shear

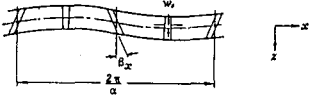


Fig. 2: Schematic figures of antisymmetric modes of simply-supported rectangular plate

Table 1: Eigenvalue Ω for simply-supported rectangular plate ($\nu = 0.3$)

	$g^2(mh/b)^2 + (\pi h/b)^2$	0.01	0.10	0.50	1.00	10.00
A-I	Exact solution	0.0032	0.0089	1.5154	—	9.2894
	G.H. theory (3-order)	0.0032	0.0089	1.5155	3.7471	9.2910
	G.H. theory (3-order)	0.0032	0.0089	1.5186	3.7758	9.6005
	Ambartsunyan	0.0031	0.0082	1.5051	3.7008	9.1901
	Baluch-Voyiadjis	0.0031	0.0088	1.5141	3.7059	9.4084
	refined B-V theory	0.0031	0.0084	1.4839	3.6536	9.0375
	Schmidt ($\kappa^2 = 5/6$)	0.0030	0.0021	1.4890	3.6352	8.9819
	Mindlin ($\kappa^2 = \pi^2/12$)	0.0033	0.0069	2.4079	6.6317	50.0851
	Classical theory	0.0093	0.0089	2.4079	6.6317	50.0851
	Exact solution	3.1729	3.4128	3.8476	—	—
A-II	G.H. theory (3-order)	3.1729	3.4127	3.8477	5.4414	10.6072
	G.H. theory (3-order)	3.1737	3.4135	3.8486	5.4419	10.6075
	Ambartsunyan	3.1933	3.4317	3.8646	4.4534	10.6134
	Baluch-Voyiadjis	3.1933	3.4317	3.8646	4.4534	10.6134
	refined B-V theory	3.1933	3.4317	3.8646	4.4534	10.6134
	Schmidt ($\kappa^2 = 5/6$)	3.1933	3.4317	3.8646	4.4534	10.6134
	Mindlin ($\kappa^2 = \pi^2/12$)	3.1729	3.4128	3.8476	5.4414	10.6072
	Exact solution	3.2465	3.5011	4.9068	7.4035	11.6772
	G.H. theory (3-order)	3.2465	3.5011	4.9068	7.4035	11.6772
	G.H. theory (3-order)	3.2465	3.5011	4.9068	7.4035	11.6772
A-III	Ambartsunyan	3.2720	3.5948	5.0590	8.2066	17.2241
	Baluch-Voyiadjis	3.2701	3.5925	5.0591	8.2047	17.2013
	refined B-V theory	3.2741	4.0111	5.0971	8.2366	17.5251
	Schmidt ($\kappa^2 = 5/6$)	3.2528	3.9928	5.0804	8.3320	17.5181
	Mindlin ($\kappa^2 = \pi^2/12$)	3.2528	3.9928	5.0804	8.3320	17.5181
	Exact solution	0.4443	1.3239	2.2314	4.4420	10.1313
	G.H. theory (3-order)	0.7498	2.2171	3.5306	—	—
	G.H. theory (3-order)	0.7498	2.2171	3.5307	5.2015	9.6687
	Ambartsunyan	0.7498	2.2193	3.5731	5.8261	10.6420
	Baluch-Voyiadjis	0.7510	2.2520	3.7549	7.5098	17.1250
S-II	refined B-V theory	0.7510	2.2530	3.7549	7.5098	17.1250
	Schmidt	0.7510	2.2530	3.7549	7.5098	17.1250
	Classical theory	0.7510	2.2530	3.7549	7.5098	17.1250

一方、変位場の仮定に基づく各種の動的な平板理論を包含した理論として *General Higher-Order* 理論を位置づけ、べき級数展開; $u = \sum_{n=0}^{\infty} z^n u^{(n)}(x, y)$ etc を用いた場合について、その支配方程式を以下に示す。

(面外挙動の支配方程式; G.H. 理論) $n=1, 3, 5, \dots$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} B_{m,n} [G \nabla^2 u^{(m)} + (\lambda + G) e^{(m)}_{,x} + \{(m+1)\lambda - nG\} w^{(m+1)}_{,x}] \\ - 2G \left(\frac{h}{2}\right)^m w^{(m)}_{,x} - nG \sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} B_{m,n-1} (m+1) u^{(m+1)} = \rho \sum_{m=0,2,\dots}^{\infty} B_{m,n} \ddot{u}^{(m)}, \end{aligned} \right\} [3]$$

etc

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} B_{m,n} [G \nabla^2 w^{(m)} + \{(m+1)G - (m-1)\lambda\} e^{(m+1)}] \\ - (n+1)(\lambda + 2G) \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} B_{m,n} (m+1) w^{(m+1)} = - \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} \rho + \rho \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} B_{m,n+1} \ddot{w}^{(m)}, \end{aligned} \right\} [4]$$

ここに $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $B_{m,n} = \left(\frac{h}{2}\right)^{m+n} \frac{\rho}{m+n+1}$, $e^{(m)} = u^{(m)}_{,x} + v^{(m)}_{,y}$
(他の平板理論との関係)

ここで、変位係数として $u^{(0)} \sim u^{(2)}$, $v^{(0)} \sim v^{(2)}$, $w^{(0)} \sim w^{(2)}$ を採用し、時間項を無視すれば上の理論に一致し、また $u^{(1)}$, $v^{(1)}$, $w^{(0)}$ のみを採用したものは Mindlin 理論と同レベルとなるが構成関係式の特異化、 k^2 の導入等に差異がみられる。

[3] 数値計算例 これらの各種理論を用いて計算した結果の一部を Table 1, Fig. 3, 4 に示す。なお Fig. 1 は座標系を示し、Fig. 2 は逆対称な板厚モードの振動の概念図である。

まず周辺単純支持矩形板の固有振動数パラメータ $\Omega (= \omega h / \sqrt{G/\rho})$ と各板厚モードに対して波数パラメータ θ の 5 ケースについて示したのが Table 1 である。このうち $\theta = 2.0$ の A-III における変位、応力の板厚モードの計算結果が Fig. 3 に示されている。最後に Fig. 4 は無限板中を S-V 波および P 波が伝播する場合の位相速度パラメータ C_p/C_s の波数パラメータ θ に対する変化を示している。

これらより次のようなことが言える。古典理論では逆対称な板厚モードは A-I のみしか現れず、これも板厚および波数の増大につれて大きな誤差を含むようになる。Mindlin 理論での固有振動数および位相速度の解析精度は、他の多くの理論と同程度だが、板厚モードは直線性の仮定のため他の理論での分布を平均化した直線となる。修正 Baluch-Voyiadis 理論の場合、高次慣性項の考慮は必ずしも高精度の結果を与えるとは限らない。全般的に、*General Higher-Order* 理論が良い精度の結果を与える。

[4] 結 言 その他の計算例については当日発表する。なおここでは紙面の都合上、面内挙動の支配方程式は割愛し、面外についても対称な形に表わされる式は記述を省略した。

[参考文献] 1) Mindlin, R.D.; *J. Appl. Mech.* (1951) pp31~38; *J. Appl. Mech.* (1956) pp430~436. 2) Schmidt, R.; *J. Indust. Math. Soc.* 27(1977) pp23~38. 3) Ambartsumyan, S.A.; "異方弾性板の理論" (1975) pp175~187. 4) Voyiadis, G. Z. & Baluch, H. N.; *J. Sound Vib.* 76(1981) pp57~64. 5) Reissner, E.; *J. Appl. Mech.* (1945) ppA67~A77. 6) 平島, 根岸; 第36回工学会年次学術講演会概要集(1981) pp29~30. 7) Lo, K.H. et al.; *J. Appl. Mech.* (1977) pp663~673.

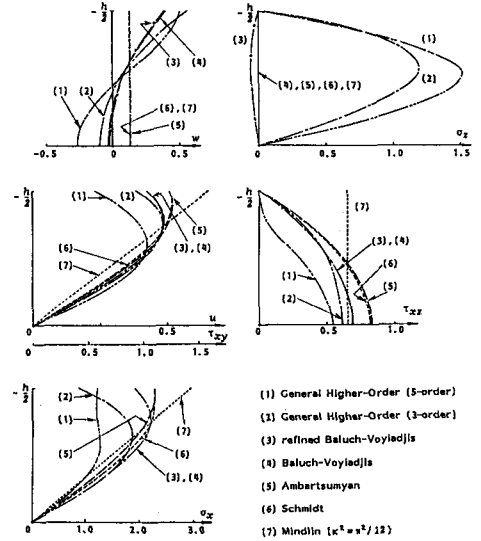


Fig. 3: Distributions of w , u , v , σ_x , σ_y and τ_{xy} along the thickness for mode A-III of simply-supported rectangular plate ($\nu=0.3$) with $\theta=2.0$

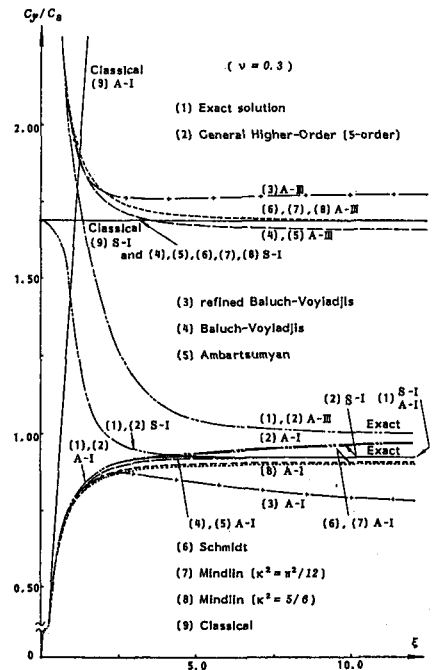


Fig. 4: Dispersion relation (phase velocity spectrum C_p/C_s versus θ) of an infinite plate ($\nu=0.3$). $C_s = \sqrt{G/\rho}$, $\theta = kh$.