I-5　　鏡像の原理による有孔無限板の二次元弾性問題の解析

－ハート型孔の場合－

三菱重工業（株）　正　員　栗橋　秀幸
北海道大学工学部　正　員　渡辺　昇
北海道大学工学部　正　員　林川　俊郎

1．応力の複素表示

二次元弾性問題はAiryの応力関数F(x,y) によって表現できる。2つの解析関数により，Fは

$$F(x,y) = \mathrm{Re}\left[\,\bar{z}\,\varphi(z) + \phi(z)\right] \tag{1}$$

という形で表わすことができる。この形を用いれば、応力は次のように表現できる。

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \mathrm{Re}\left[\,2\varphi' + \left\{\bar{z}\,\varphi'' + \phi''\right\}\right] \\ \sigma_y &= \mathrm{Re}\left[\,2\varphi' + \left\{\bar{z}\,\varphi'' + \phi''\right\}\right] \\ \tau_{xy} &= \mathrm{Im}\left[\,\bar{z}\,\varphi'' + \phi''\right] \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

2．境界条件

有孔無限板では境界条件として、　無限遠における応力状態　および　孔辺の拘束条件　の2つを考える。前者は式（2）から孔の無い場合の解析関数

$$\varphi = Az \quad , \quad \phi = Bz^2 \tag{3}$$

によって与えられる。ここでAとBは無限遠において一様な応力が作用する場合に次のように与えられる。

$$A = (\sigma_x + \sigma_y)/4 \quad , \quad B = (\sigma_y - \sigma_x + i2\tau_{xy})/4 \tag{4}$$

もう1つの境界条件は、新しい関数として

$$\chi = \bar{z}\,\varphi' + \phi' \tag{5}$$

を定義しておけば、孔辺が自由である場合には孔辺上で

$$\varphi(z) = -\overline{\chi(z)} \tag{6}$$

という形で与えられる。

3．鏡像の原理

解析曲線の弧Lの片側に接する領域D内で正則、L上で連続な2つの関数μ(z) 、ν(z) がL上で

$$\mu(z) = \overline{\nu(z)} \tag{7}$$

を満たすならば、両者はLを超えて解析接続ができる。

このとき、Lの方程式　ω(x,y) ＝ 0　に

$$x = (z + \bar{z})/2 \ , \ y = (z - \bar{z})/2i$$

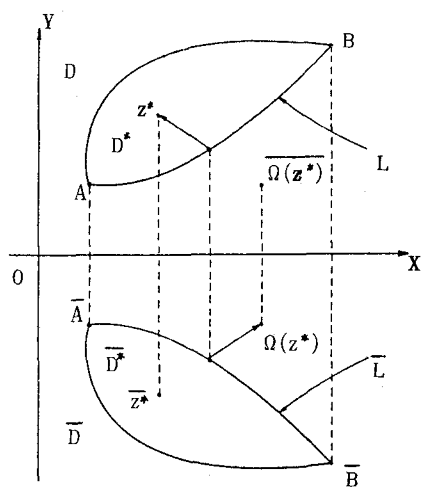
を代入し、$\bar{z}$ について解いて得られる式を

$$\bar{z} = \Omega(z) \tag{8}$$

とすれば、

$$\mu(z) = \bar{\nu}(\Omega(z)) \ , \quad \nu(z) = \bar{\mu}(\Omega(z)) \tag{9}$$

によって2つの関数のLを超えての解析接続が求められる。



図－1　実平面

4．解析の概要

式（6）より、式（7）において　μ(z) ＝ φ(z) 、　ν(z) ＝ －χ(z) とおけば2つの関数 φ 、χ について鏡像の原理を用いることができる。

式（9）によって決まる関数は

$$\varphi^*(z) = -\bar{\chi}(\Omega(z)) \ , \quad \chi^*(z) = -\bar{\varphi}(\Omega(z)) \tag{10}$$

となるが、これを鏡像の関数といい、D内で既知であったφ(z) 、χ(z) の解析接続となっている。

結局、境界Lを持った領域 D ＋ D^* における解析関数は、D 内のφ、χとD^*内のφ^*、χ^*とを重ね合わせたものとなる。

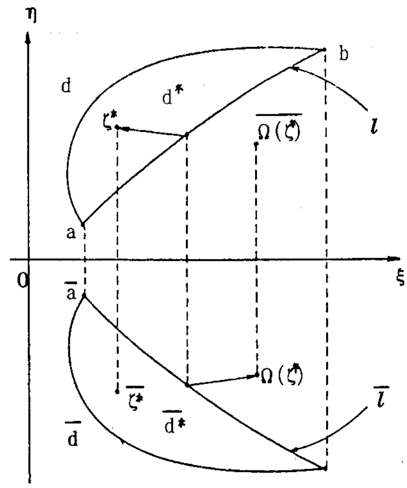
5．等角写像の応用

孔の形状が複雑である場合、直接Ω(z) を求めることは困難となる。そこで単純な形状の孔を有する補助平面を想定し、実際の有孔板（実平面）と写像関数によって対応づけながら、補助平面の点の値の関数として実平面の解析関数を求めることを考える。

補助平面としては実平面の境界およびその外部領域（すなわち孔を除いた部分）に対応するような境界と外部領域を持つものであれば十分であるが、単位円を持つものが便利である。

関数 φ(z)、χ(z) の変換については、実数の微分に関する公式を用いればよい。

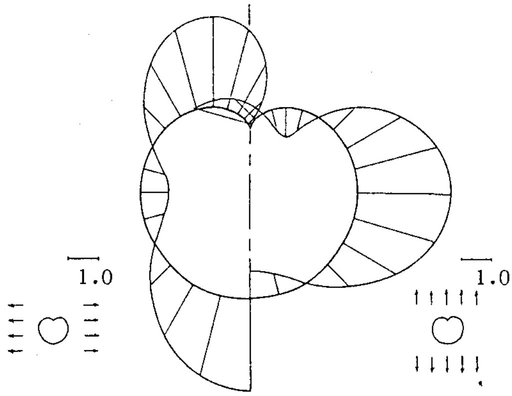
写像関数が複雑である場合、Riemann 面の選択に注意する必要がある。



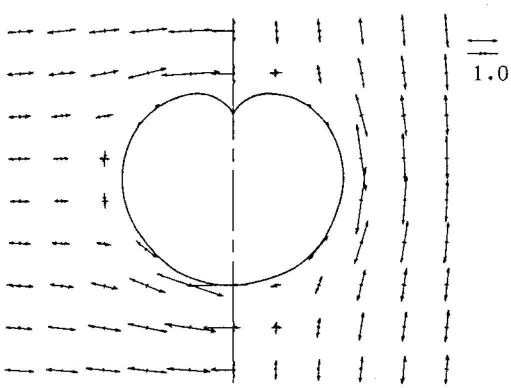
図－2　補助平面

6．計算例

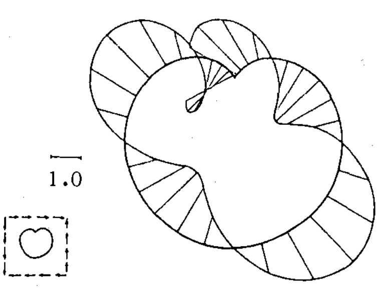
ハート型孔を有する無限板に直応力とせん断応力が作用した場合について計算した結果を以下の図に示す。



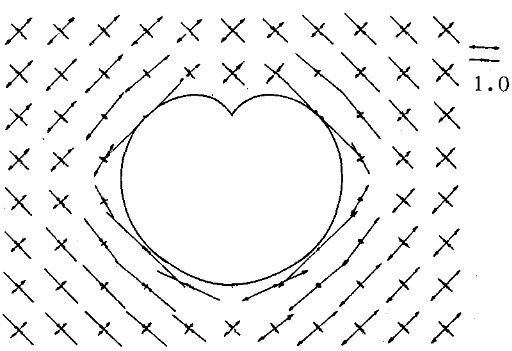
図－3　孔辺応力（直応力）



図－4　主応力（直応力）



図－5　孔辺応力（せん断応力）



図－6　主応力（せん断応力）

（参考文献）

1）渡辺　昇：土木工学のための複素関数論の応用と計算、朝倉書店

2）森口　繁一：2 次元弾性論、岩波書店

3）今井　功：等角写像とその応用、岩波書店

4）渡辺、林川、栗橋：鏡像の原理を用いた有孔無限板の解析、土木学会北海道支部、第38号、1982