

東海大学海洋学部 正員 ○北条道弘

北陸電力 正員 宮岸和信

京都大学工学部 正員 丹羽義次

1. はじめに

開孔部を有する円筒殻の応力集中問題は、パイプライン、乗子炉の付属機器など多くの構造物の設計段階で、また、破壊に対する規準を定める上において、きわめて重要な問題である。これらの重要性により、開孔部を有する円筒殻の応力集中問題はすでに多くの研究者により解析されてきたが、¹⁾それらの解析の多くは摂動法や級数解法によるものであった。しかし、摂動法や級数解法を用いた解析においては、任意形状の開孔の解析や曲率パラメーターが大きくなった場合の解析は困難であった。座標系に拘束されず、任意形状の開孔についても容易に解析を行なうことが可能な解析手法として、近年、積分方程式法が適用され始めており、Sanders²⁾、Hansen³⁾、中村⁴⁾の研究がある。本研究は、円孔又は楕円孔を有する円筒殻が、軸引張、ねじり、内圧を受ける場合の開孔部における応力解析を、薄い扁平殻理論に基づき積分方程式法により行なったものである。未知量の近似関数としては同期3次B-スプライン関数を用い、また、積分核の近似補間として有界な積分核に対しては同期3次B-スプライン関数を、さらに特異性を有する積分核に対しては非同期3次B-スプライン関数を用いて、精度の向上及び計算時間の短縮をはかった。

2. 積分方程式法による定式化

Fig.1のような直交直線座標系を採用すると、本開孔問題は以下のように表わされる。ただし、開孔前の諸量には右肩に0を付し、開孔後の諸量には何も付さず、さらに開孔前と開孔後の諸量の差には右肩にdを付して示す。また、Fig.1に示すように開孔の境界をC、内部をD⁻、外部をD⁺とする。(諸量はすべて無次元化を行なっている) 支配方程式

$$\mathbb{L}u(x) = -i \frac{p}{L_R} \quad (x \in D^+) \quad (1), \quad \mathbb{L}u^d(x) = 0 \quad (x \in D^+) \quad (2)$$

$$\mathbb{L}u^0(x) = -i \frac{p}{L_R} \quad (x \in D^- \cup C \cup D^+) \quad (3)$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \phi - i\psi, \quad \phi: \text{応力関数}, \quad \psi: \text{面外変位}, \quad \mathbb{L} = \Delta^2 - 8i \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad L_R = \frac{L_0}{\delta R}, \quad R: \text{シェルの代表曲率半径}, \\ L_0: \text{代表長さ}, \quad p: \text{内圧 (軸引張、ねじり) の場合は } p=0 \end{array} \right]$$

基本解 2次の解

$$\mathbb{L}G(X, Y) = -\delta(X, Y) \quad (4) \quad \left[\begin{array}{l} X = X(X_1, X_2), \quad Y = Y(Y_1, Y_2) \\ \delta(X, Y): \text{Dirac のデルタ関数} \end{array} \right]$$

即ち、基本解 $G(X, Y)$ は次のようになる。

$$G(X, Y) = \int_0^{\pi} \sinh(\kappa z) K_0(\kappa \rho) dz + \int_0^{\pi} \kappa K_2(\kappa |z|) dz + \int_0^{\pi} |z| K_1(\kappa |z|) dz \quad (5)$$

$$\left[\begin{array}{l} K_n: n\text{-次の変形ベッセル関数}, \quad \kappa = 1+i, \quad \int = (1-i)/\delta\pi, \quad r_n = X_n - Y_n, \quad \rho = (x^2 + y^2)^{1/2} \end{array} \right]$$

境界条件

$$N_n = \phi_{,tt} = 0 \quad (6), \quad N_{nt} = -\phi_{,nt} = 0 \quad (7), \quad M_n = -L_R \{ \Delta w - (1-\nu) w_{,tt} \} = 0 \quad (8),$$

$$V_n = -L_R \{ (\Delta w)_{,n} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial t} (w_{,nt}) \} = V^* \quad (9)$$

ここに、 V^* は内圧の場合に開孔周上で生じる一様なせん断力であり、軸引張、ねじりの場合は $V^* = 0$ とする。

無限遠点での条件

$$u^d(x) = 0 \quad (x \in C_\infty) \quad (10) \quad \left[\begin{array}{l} C_\infty: \text{内部に } C \text{ を含む無限遠点での仮想境界} \end{array} \right]$$

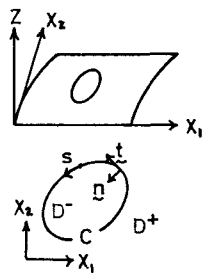


Fig.1 座標、領域、単位ベクトル。

以上を考慮し、 U^d に対して Green の外部 (D^+) 表現、 U^o に対しては内部場 (D^-) の外部表現を用いることにより、荷重として軸引張、ねじり、内圧を受ける開孔問題の解 $U(X) = U^o(X) + U^d(X)$ の積分表示は次式となる。

$$U(X) = U^o(X) + \left[\sum_{n=1}^{\infty} K_n(X, y) F_n(y) dy + i \left[\int_C \left\{ G \frac{\partial U}{\partial n} - G_n \frac{\partial U}{\partial n} \right\} d\gamma - \int_{D^-} G \frac{\partial U}{\partial n} dA \right] \right] \quad (X \in D^+) \quad (11)$$

$$\left[F_1 = (\Delta\phi)_n, \quad F_2 = \Delta\phi, \quad F_3 = -w_n, \quad F_4 = -\frac{\partial w}{\partial \theta}, \quad K_n(X, y): \text{積分核 (省略)} \right]$$

また、無次元化された膜応力及び曲げ応力は、 F_2, F_3, F_4 により次式で表わされる。

$$\sigma_m/\sigma = F_2, \quad \sigma_b/\sigma = \{3(1-\nu^2)\}^{1/2} \left(\frac{\partial F_4}{\partial \theta} - \kappa_* F_3 \right) \quad \left[\kappa_*: \text{開孔周上の点における開孔の局所的な曲率} \right] \quad (12)$$

こゝで、境界条件(8)、(9)式を(11)式に課し、次のように他の境界条件(6)、(7)式及び未知量 F_2, F_4 を開孔周上で表現することにより、積分方程式系を構成することが出来る。

$$\begin{aligned} 0 &= \lim (Re U), t_x t_x \quad (13), & 0 &= \lim (Re U), n_x t_x \quad (14), \\ w, n_x &= \lim (Im U), n_x \quad (15), & \frac{\partial w}{\partial s} &= \lim \frac{\partial}{\partial s} (Im U) \quad (16). \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{l} \text{ただし、} \lim \text{ は 極限} \\ D^+ \ni X \rightarrow X \in C \text{ を意味する} \end{array} \right]$$

よって、本問題は上述の積分方程式系及び多連結領域における適合条件式を満足する F_2 を求めることに帰着する。

3. 数値解析例

離散化に際し、未知量および有界な積分核の近似関数として周期3次B-スプライン関数、特異性を有する積分核の近似関数として非周期3次B-スプライン関数を用いることは、精度の向上及び計算時間の短縮に対して有効であることが確かめられた。また、かなり大きい曲率パラメータを有する開孔周上の応力解析に本手法が有効であることがわかった。一例として、Fig. 2、Fig. 3に軸引張に対する円孔周上の膜応力及び曲げ応力について、

本解析結果と Sanders の解との比較を示した。また、ポアソン比 $\nu = 1/3$ 、曲率パラメータ $\lambda = \{3(1-\nu^2)/4h^2 R^2\}^{1/2} a = 2$ (h : シェルの厚さ)、楕円の偏平率 $b/a = 0.4$ としたときの楕円孔周上に生じる全応力 (膜応力+曲げ応力) の最大値 $(\sigma_{tot})_{max}/\sigma$ をシェルの外表面及び内表面について θ は $4 \sim 6$ に示した。Fig. 4~6 により、長軸と円筒殻の母線とのなす角 ϕ の値によって楕円孔周上の応力集中がどのように変化するかがわかる。これによると、全応力の意味で応力集中が最小となるのは、軸引張及びねじりの場合 $\phi = 0^\circ$ 、内圧の場合 $\phi = 90^\circ$ 、また、全応力の意味で応力集中が最大となるのは、軸引張の場合 $\phi = 90^\circ$ 、ねじりの場合 $\phi = 45^\circ$ 、内圧の場合 $\phi = 0^\circ$ のときの内表面上の点であることがわかる。詳細は当日報告する。

参考文献

- 1) Lekkerkerker, J.G., Nuclear Engineering and Design, Vol. 20, 1972.
- 2) Sanders, J.L. Jr., Journal of Applied Mechanics, Vol. 42, 1975.
- 3) Hansen, E. B., Journal of Elasticity, Vol. 7, 1977.
- 4) 中村雅彦(他), 土木学会関西支部年講, I-6, 1981.

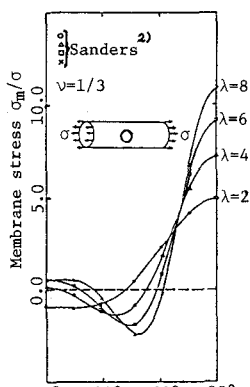


Fig. 2 円孔周上の膜応力 (軸引張)

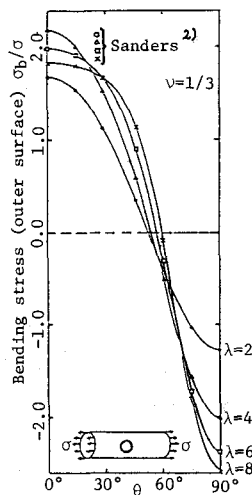


Fig. 3 円孔周上の曲げ応力 (軸引張)

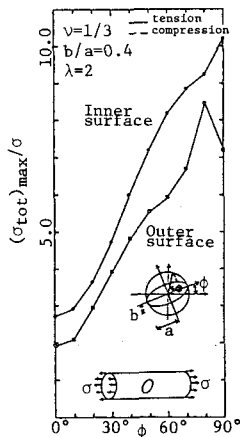


Fig. 4 楕円孔周上の全応力 (軸引張)

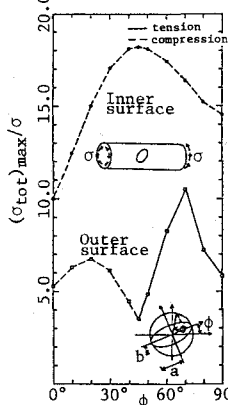


Fig. 5 楕円孔周上の全応力 (ねじり)

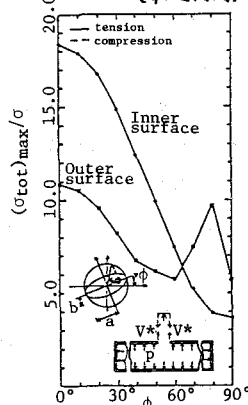


Fig. 6 楕円孔周上の全応力 (内圧)