

大阪大学工学部 正員 久武勝保

大阪大学大学院 学生員 上田博之

① はじめに

有限要素法 (FEM) は、材料の非線形性、不均質性及び複雑な境界条件の取扱いが容易であるが、地盤のように解析対象領域が無限に広がる、という場合でも、通常それを有限領域に置換して解析するため、解析領域の広さが結果に影響を与えることが知られている。一方、境界要素法 (BEM) は基本解が得られる問題はその適用が限られるが、無限遠での境界条件を満足することができ、また応力勾配の大きな問題において高い精度が期待できる。さらに FEM では領域内部の離散化が必要とするが、BEM では境界の離散化のみでよく、したがって入力データの量及び計算機の記憶容量が FEM に比べて大幅に減少する。著者らは、これらの両解析法の長所を生かすために、両解析法を融合した融合解析法を定式化して¹⁾、トンネルの二次元解析に既に行い²⁾、融合解析法の有用性を確認した。そこで、本研究では、三次元問題に対して融合解析法を開発し、その精度を検討した。

② 融合解析法の概略^{1)~4)}

ここでは、FEM 領域の外側に BEM 領域とし、無限領域を有する場合について、融合解析法の概略を示す。

FEM で取扱う全節点において、節点力ベクトル f と節点変位ベクトル u の間には、次式が成立する。

$$K_F u = f \quad \text{--- (1)}$$

ここに、 K_F は FEM の剛性マトリックスである。

一方、境界要素法の基礎式は

$$H u = G p \quad \text{--- (2)}$$

で与えられる。ここに、 H 、 G はそれぞれ変位、応力に関する基本解の係数マトリックス、 p は節点応力ベクトルである。式 (2) の両辺に左から G^T を掛けければ、

$$G^T H u = p \quad \text{--- (3)}$$

となり、さらに左から節点応力ベクトルを節点力ベクトルに変換するマトリックス M を掛けると、式 (3) は FEM と同様の形で表現される。すなわち、

$$K_B u = f \quad \text{--- (4)}$$

ここに、 $K_B = M G^T H$ 、 $f = M p$ である。

両領域の結合部において、変位の適合条件および節点力のつり合い条件を考慮すると、以下のような基礎式と得る。

$$(K_F + K_B) u = f \quad \text{--- (5)}$$

これを解けば、FEM 領域の節点の変位が求められ、両領域の結合部の節点変位ベクトル、および式 (3) で与えられる節点応力ベクトルから、BEM 領域の変位、応力も通常の BEM で計算される。

ここで、マトリックス M は各境界要素について、次のように定義される。

$$M = \int_{S_i} \phi^T \phi dS_i \quad \text{--- (6)}$$

ここで、 ϕ 、 ϕ^T はそれぞれ変位、応力に関する内挿関数、 S_i は境界要素の面積を示す。 ϕ 、 ϕ^T に形状関数 N を用いれば、

$$M = \int_1^1 \int_1^1 N^T N \det |J| d\xi d\eta$$

で与えられ、これを結合部の全境界要素について重ね合わせればよい。ここに J はヤコビアンである。

3 融合解析法の精度

無限領域内の半径 a の球空洞に内圧 P が作用する場合について、まず空洞の中心から距離 r に離れた点の無次元変位を、弾性理論と BEM で求め、それらの結果を Table 1 に示す。ここに、 G はせん断弾性定数である。この場合、境界要素解析では、要素は 8 節点 2 次アイソパラメトリック要素、積分はガウスの数値積分（積分点は 3×3 ）が用いられている。また Fig. 1 に示すように問題は半面対称問題として解析され、計算時間の短縮がなされている。

次に、同じ問題を融合解析法 (Coupling method) で解析し、その精度の検討を行った。Fig. 2 に $Y-Z$ 断面での要素分割を示す。この場合、FEM 領域の広さを $r/a = 2.0$ までとした場合の結果を Table 1 と Fig. 3 に、また $r/a = 3.0$ までとした場合の結果を Fig. 4 に示す。なおこれらの図と表には比較のため、最も外側の節点を自由にした場合 (FEM free)、および固定にした場合 (FEM fix) について、FEM のみで解析を行った結果も示している。FEM では、要素は 20 節点 2 次アイソパラメトリック要素、積分はガウスの数値積分（積分点は $2 \times 2 \times 2$ ）で行い、また境界要素は前述のものをを用いた。

FEM のみの解析では、いずれの境界条件の場合においても、無限遠での境界条件を表現し得ず、また解析領域の広さが解析結果に大きく影響を与えていることがわかる。融合解析では FEM 領域の広さに影響されることがなく、高い精度が得られた。

4 結論

1. BEM の高い精度が確認され、対称問題としての取り扱いにより経済的な解析が行われた。
 2. 融合解析法の精度が確認され、解析結果が FEM 領域の広さに影響されないことが確認された。
 3. 融合解析法により、両解析法の長所を失うことなく、経済的かつ精度のよい三次元解析を行うことが可能になった。
- 最後に、本研究に協力された西田昌弘君 (奥村組) に謝意を表します。

参考文献

- 1) 伊藤富雄・久武勝保・長山孝則; 土木学会第 33 回年報, オ 3 部門, pp. 384 ~ 385, 1978. 2) 伊藤富雄・久武勝保; 土木学会論文報告集, 第 308 号, 1981. 4 月 3) Zienkiewicz O.C., D.W. Kelly and P. Belles; Int. J. Numerical Method in Engineering, vol. 11, pp 355 ~ 395, 1977. 4) Brebbia C. A. and P. Georgiou; Appl. Math. Modelling, vol. 3, pp 212 ~ 220, 1979.

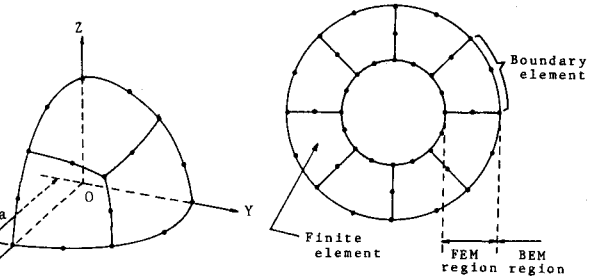


Fig. 1 Boundary element meshes Fig. 2 Coupling of FEM and BEM

Table 1 Non-dimensional radial displacement $U/(Pa/G)$ (error %)

r/a	Theoretical	BEM	FEM (free)	FEM (fix)	Coupling method
1.0	0.25	0.2518 (0.8)	0.2969 (18.8)	0.1758 (-30.5)	0.2446 (-2.2)
1.5	0.1111	0.1131 (1.8)	0.1534 (38.1)	0.0480 (-56.8)	0.1056 (-5.0)
2.0	0.0625	0.0642 (2.8)	0.1167 (86.7)	0.0 (-100.)	0.0586 (-6.1)
2.5	0.04	0.0412 (3.0)			0.0390 (-2.6)
3.0	0.0278	0.0286 (3.1)			0.0263 (-5.2)
3.5	0.0204	0.0210 (3.2)			0.0195 (-4.3)
4.0	0.0156	0.0161 (3.2)			0.0150 (-3.8)
4.5	0.0123	0.0127 (3.2)			0.0119 (-3.5)
5.0	0.01	0.0105 (3.2)			0.0097 (-3.4)

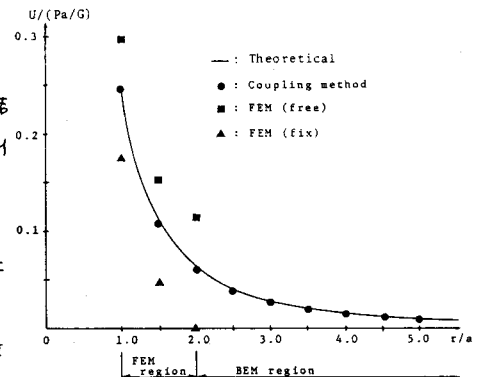


Fig. 3 Comparison between coupling method and FEM

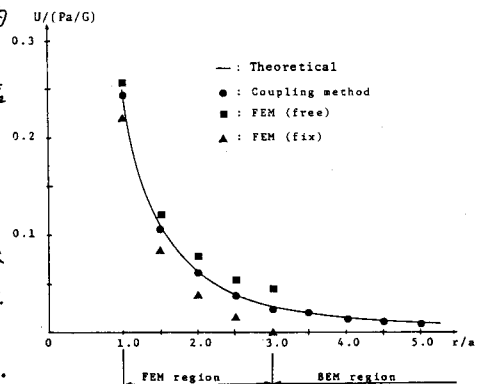


Fig. 4 Comparison between Coupling method and FEM