I-1　有限変形における全ポテンシャルエネルギー第2変分

熊本大学工学部　正員　三池亮次

1．はじめに　物体が外力を受けて内部に生ずる全ポテンシャルエネルギーΠの第2変分$\delta^2\Pi$は，弾性安定問題において重要な役割を演じており，$\delta^2\Pi>0$においてΠは極小で安定，$\delta^2\Pi<0$において不安定である。しかるに，微小変形理論の成立する範囲においては必ず$\delta^2\Pi>0$であり，$\delta^2\Pi<0$となり得るのは有限変形理論の場合であって，有限変形における全ポテンシャルエネルギー第2変分を誘導することは興味ある問題である。　ここでは，有限変形における全ポテンシャルエネルギー第2変分の一般式が，マトリックス・テンソル記法に従って明確に表示できることを述べるが，従来このような一般式は誘導されていなかったようである。

2．付帯条件をもった汎関数の第2変分　変関数yの変数xの各要素に関する導関数をy'とするとき，汎関数

$$I=\iiint_{V_0} F(x;y,y')\,dV_0 \tag{1}$$

を付帯条件

$$\begin{aligned}\phi&=[\phi_1\ \phi_2\ \cdots\cdots\ \phi_r]^T\quad,\quad \phi_i=\phi_i(x;y,y')\\&=\phi(x;y,y')\end{aligned} \tag{2}$$

の下で極値とする条件を求める。　汎関数Iの全変分は

$$\delta I^{(T)}=\iiint_{V_0}\left(\delta y^T\frac{\partial}{\partial y}+\delta y'^T\frac{\partial}{\partial y'}\right)F\,dV_0+\frac{1}{2}\iiint_{V_0}\left(\delta y^T\frac{\partial}{\partial y}+\delta y'^T\frac{\partial}{\partial y'}\right)^2F\,dV_0+\cdots\cdot \tag{3}$$

同様に，式(2)のϕ_iの全変分$\delta\phi_i^{(T)}$を求め，変数xのみの関数で，変関数yについて独立の Lagrange 未定係数λを$\delta\phi$に乗じて式(3)に加えると，式(3)においてFの代りに$F^*=F+\lambda^T\phi$を用いることが可能であることを知る。したがって，汎関数Iの停留条件およびその第2変分$\delta^2 I$は

$$\delta I=\iiint_{V_0}\left(\delta y^T\frac{\partial}{\partial y}+\delta y'^T\frac{\partial}{\partial y'}\right)F^*\,dV_0=0 \tag{4}$$

$$\delta^2 I=\frac{1}{2}\iiint_{V_0}\left(\delta y^T\frac{\partial}{\partial y}+\delta y'^T\frac{\partial}{\partial y'}\right)^2F^*\,dV_0 \tag{5}$$

であり，停留点において$\delta^2 I>0$のとき，停留点において汎関数Iは最小であり，$\delta^2 I<0$のときIは停留点において最大で不安定な停留点となることがわかる。

3．有限変形における全ポテンシャルエネルギーとその停留条件　物体内部の任意点の位置ベクトルaが，物体力fおよび表面力pを受けて有限の変位Δuを生じ，位置ベクトルは$x=a+\Delta u$になるものとする。その変形前後の物体の体積要素をδV_0，δV，面積要素をδA_0，δAとし，変形前の物体表面の外側法線方向の単位ベクトルをn_0とすると，変形前の体積および面積に換算された物体力$f^*=f\,\delta V/\delta V_0$および表面力$p^*=p\,\delta A/\delta A_0$と，それによって物体内部に生ずる Kirchhoff 応力テンソルT_Kの間に，次のつり合い式

$$\left(\frac{\partial x}{\partial a}T_K\right)\frac{\partial}{\partial a}+f^*=0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial x}{\partial a}T_K n_0=p^* \tag{7}$$

が成立する。この有限変位 Δu の関数である，

$$E_g=\frac{1}{2}\left(U'+U'^T+U'^TU'\right),\quad U'=\left(\frac{\partial\Delta u}{\partial a}\right)^T\equiv[\Delta u_1' \ \Delta u_2' \ \Delta u_3'],\quad \Delta u_i'=\frac{\partial\Delta u_i}{\partial a} \tag{8}$$

によって Green ひずみテンソル E_g を与えると，E_g と変位 Δu を変関数とする汎関数

$$\Pi=\iiint_{V_0} f\,dV_0+\iint_{A_0} H\,dA_0 \tag{9}$$

は，全ポテンシャルエネルギーである。ここに，式(8)の第1式は付帯条件として式(9)の中に組み込まれ

$$f=U+\mathrm{trace}\left[\left\{E_g-\frac{1}{2}(U'+U'^T+U'^TU')\right\}\Lambda\right]-f^{*}\cdot\Delta u,\quad H=-p^{*}\cdot\Delta u \tag{10}$$

で，また上式の U はひずみエネルギー密度で，T_K を定数として $U=\mathrm{trace}(T_K E_g)$ のように $\partial U/\partial E_g=T_K$ となるような E_g の関数である。また，もし T_K と E_g の間に通常の応力とひずみの間の構成方程式

$$T_K=2G\,E_g+\lambda\,\mathrm{trace}(E_g)\cdot\mathbb{I} \tag{11}$$

が成立する場合には，

$$U=G\,\mathrm{trace}(E_g^2)+\frac{1}{2}\lambda\{\mathrm{trace}(E_g)\}^2 \tag{12}$$

を用いても $\partial U/\partial E_g=T_K$ を得る。なお G，λ はせん断弾性係数，Lamé の定数である。

汎関数 Π の停留条件は[1] 式(4)において y の代りに Δu と E_g を用いると，

$$\frac{\partial f}{\partial E_g}=\frac{\partial U}{\partial E_g}+\Lambda^T=0 \quad ,\ \text{これより}\ \Lambda=-T_K \tag{13}$$

$$\frac{\partial f}{\partial\Delta u}-\frac{\partial f}{\partial U'}\frac{\partial}{\partial a}=-f^{*}+\frac{1}{2}\left(\Lambda^T+\Lambda+2U'\Lambda\right)\frac{\partial}{\partial a}=0,\quad \text{(式(6)に一致)} \tag{14}$$

および，境界において

$$\frac{\partial f}{\partial U'}n_0+\frac{\partial H}{\partial\Delta u}=-\frac{1}{2}\left(\Lambda+\Lambda^T+2U'\Lambda\right)n_0-p^{*}=0\quad,\ \text{(式(7)に一致)} \tag{15}$$

または

$$\delta\Delta u=0 \tag{16}$$

4．有限変形における全ポテンシャルエネルギー第2変分．　式(5)を用いて，全ポテンシャルエネルギー Π の第2変分を求める。ひずみエネルギー密度関数が式(12)で与えられるとき，

$$\frac{\partial U}{\partial E_g}=2G\,E_g+\lambda\,\mathrm{trace}(E_g)\cdot\mathbb{I}$$

であるから，これを式(13)に用いると，式(5)において，

$$\delta y^T\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta y^T\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\mathrm{trace}\left\{\delta E_g^T\frac{\partial}{\partial E_g}\mathrm{trace}\left(\delta E_g^T\frac{\partial f}{\partial E_g}\right)\right\}=2G\,\mathrm{trace}(\delta E_g^2)+\lambda\{\mathrm{trace}(\delta E_g)\}^2 \tag{17}$$

同様にして

$$\delta y'^T\frac{\partial}{\partial y'}\left(\delta y'^T\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=\mathrm{trace}\left\{\delta U'^T\frac{\partial}{\partial U'}\mathrm{trace}\left(\delta U'^T\frac{\partial f}{\partial U'}\right)\right\}=\mathrm{trace}(\delta U'^T\delta U'T_K) \tag{18}$$

したがって

$$\delta^2\Pi=\frac{1}{2}\iiint_{V_0}\left[2G\,\mathrm{trace}(\delta E_g^2)+\lambda\{\mathrm{trace}(\delta E_g)\}^2+\mathrm{trace}(\delta U'^T\delta U'T_K)\right]dV_0 \tag{19}$$

を得る。

参考文献：1）三池亮次："有限変形における増分形エネルギー基礎理論" 土木学会論文報告集 第309号 昭56．5