Ⅳ-203　双対均衡モデル — 非集計機関選択モデルとBeckmannモデルの関係 —

岐阜大学工学部　正員　宮城俊彦

1．はじめに

本稿の目的は，Beckmannの提案した交通均衡モデルに非集計選択モデルを組み入れることであり，Beckmannモデルを主均衡問題とするとき，その双対問題を考えることによってこのことが可能になることを示す。双対均衡問題の特徴は需要モデルのパラメータ推定がlogitモデルのようなshareモデルの場合でも可能であるという点である．すなわち，主問題では逆需要関数を用いるための制約無しモデルを用いる必要がある．そして，その制約無しモデルを用いてパラメータ推定を行ない，その値を固定したままで均衡値を求めたり，総和制約を満足するようにキャリブレーションが行なわれる．したがって，初めから総和制約を考慮したlogitモデルにおけるパラメータ値とは値が異なってくるであろう。それに対し，双対均衡モデルでは需要関数を用いて均衡計算が行なわれるため，logitモデルをそのまま利用することができる．

2．Beckmannモデルによるモーダル・スプリット

Beckmannモデルは，式(1)のように与えられる。

$$\min_{x}\ F(x) = \sum_{i=1}^{I}\int_0^{X_i} B_i(\omega)\,d\omega - \sum_{i=1}^{I}\int_0^{X_i} g_i(\xi)\,d\xi \qquad (1)$$

ここで，iはi種交通機関を表わし，その個数をIとする。また，$g_i(\cdot)$はモードiの逆需要曲線で，需要曲線を$X_i = X_i(t_i)$とすると，$t_i = X_i^{-1}(X_i) = g_i(X_i)$と表わされ，$X_i$に関し単調減少関数である．また，$B_i(\cdot)$は，モード$i$のパフォーマンス関数を表わし，フローが$X_i$の場合の所要時間は$t_i = B_i(X_i)$で表わされ，$B_i$はフローに関し単調増加関数であると仮定する。

ところで，式(1)は交通施設のネットワーク特性を無視した簡易モデルで，都市間交通とか都市内交通におけるある特定の地域間の交通の分析を意図している。また，式(1)は図-1の斜線部分を最大化するモデルとなっている。

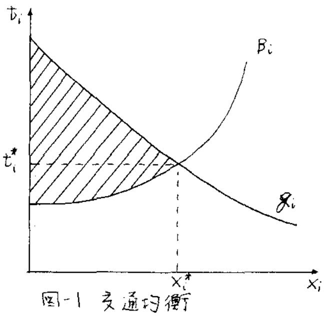

図-1 交通均衡

ここで，各モードの需要関数に次のような指数モデルを考える。

$$X_i = \exp(V_i(\theta, a)), \qquad \sum_i X_i = X \qquad (2)$$

ここに，$V_i(\theta, a)$はモードiの魅力度を表わす指標で，属性ベクトル$a \in R^m$とパラメータベクトル$\theta \in R^{m+1}$によって，$V_i(\theta, a) = \theta^T a$という線形モデルを仮定する．また，$X$は総需要量である．属性ベクトル$a$はモード$i$による所要時間$t_i$を含み，$a$から$t_i$を除いた魅力度指標を$\bar{V}_i(\theta, a)$とおくと，

$$V_i(\theta, a) = \bar{V}_i(\theta, a) + \bar{\theta}_{m+1} t_i = \bar{V}_i(\theta, a) - \pi_i \qquad (3)$$

とおける。ここに，$\bar{\theta}_{m+1} < 0$と仮定しており，また，π_iはモードiの混雑によって変化するサービスの価格を表わす。式(3)より，$g_i(X_i) = (\log \exp(\bar{V}_i(\theta, a)) - \log X_i)/\theta_{m+1} = (\log A_i/X_i)/\theta_{m+1}\ (\theta_{m+1} = -\bar{\theta}_{m+1})$となり，これを式(1)に代入することによって，

$$\min_{x}\ \frac{1}{\theta_{m+1}}\sum_{i=1}^{I} X_i \log(X_i/A_i) + \sum_{i=1}^{I}\int_0^{X_i} B_i(y)\,dy \quad ,ただし\ \sum X_i = X,\ X_i \ge 0 \qquad (4)$$

あるいは，

$$\min_{P}\ X\sum_{i=1}^{I} P_i \log(P_i/A_i) + \sum_{i=1}^{I}\int_0^{X_i} \pi_i(y)\,dy \quad ,ただし\ \sum P_i = 1,\ P_i \ge 0 \qquad (5)$$

を得る。式(5)において，P_iはモードiの選択確率であり，$V_i(\theta, a)$によって決定されるもので，正確には$P_i(\theta, a)$である。また，式(4)の目的関数は，ODペアi-jを考慮した場合には分布-機関分担-配分同時推定モデルとして機能するもので，Florian et.[1] (1978)によって提案されたモデルと類似のものである。

3. 双対均衡モデル

ここで，問題(5)の双対問題を考えてみる。まず，問題(5)の目的関数の第1項，第2項を各々 F_1，F_2 とし，その共役関数を考える。関数 $F(x)$ の共役関数は，次式で与えられる。[2]

$$F^{\#}(x^{\#}) = -\inf\{F(x) - x x^{\#}\} \quad \text{for each } x^{\#} \tag{6}$$

したがって，F_1，F_2 に対しては，

$$F_1(P_i) = X\sum_{i=1}^{I} P_i(\log P_i/A_i) \longrightarrow F_1^{\#}(P_i^{\#}) = X\log\sum_i A_i \exp(P_i^{\#}) \tag{7}$$

$$F_2(y) = \sum_{i=1}^{I}\int_0^{y_i}\pi_i(y)\,dy \longrightarrow F_2^{\#}(y^{\#}) = \sum_{i=1}^{I}\int_{\pi_i(0)}^{y_i^{\#}}\pi^{-1}(t)\,dt \tag{8}$$

で与えられる。

したがって，双対均衡問題は，

$$\min \quad X\log\sum_i A_i\exp(P_i^{\#}) + \sum_{i=1}^{I}\int_{\pi_i(0)}^{y_i^{\#}}\pi^{-1}(t)\,dt \tag{9}$$

ところで，共役関数を得る過程で，$-P_i^{\#} = y_i^{\#} = \pi_i$ であることが判るので，式(9)は次のように書き改めることができる。

$$\min_{\pi} \quad X\log\sum_i\exp(V_i(\theta,a)) + \sum_{i=1}^{I}\int_{\pi_i(0)}^{\pi_i}\pi_i^{-1}(t)\,dt \tag{10}$$

式(10)は，Daganzoの提案した均衡モデルと同じ目的関数となっている。[3]

式(10)の最適解の条件は，

$$\frac{\partial F^{\#}}{\partial \pi_i} = -X\cdot\frac{\exp(V_i(\theta,a))}{\sum_i\exp(V_i(\theta,a))} + \pi_i^{-1}(\pi^{*}) = 0 \quad \Rightarrow \quad X_i(\pi^{*}) - \pi_i^{-1}(\pi^{*}) = 0 \tag{11}$$

である。

式(11)によって，最適価格ベクトル π^{*} が決定でき，また，そのとき，モード i の需要量 $X_i(\pi^{*})$ とパフォーマンス関数 B_i を介在して得られる価格関数 $\pi_i(y_i) = \theta_{m+1}B_i(y_i)$ より得られる施設利用量 $\pi_i^{-1}(\pi^{*})$ は等しい。双対均衡問題(10)は，制約条件が $\pi \geq \pi(0)$ だけであるので，少し工夫することによって，Newton-Raphson法やDFP法を利用して解くことができる。しかも，選択確率の推定がlogitモデルを用いて行なえ，主均衡問題における問題点が解決できる。

ところで，式(10)の第1項は次の点で興味深い。すなわち，次のような線形効用モデルを仮定するとき，

$$U_i = V_i(\theta,a) + \varepsilon_i(\theta,a) \tag{12}$$

モード i を選択する人の満足度 S は，$\max U_i$ で与えられる。すなわち，$S = \max_i U_i$．確率変量 U_i の最大値の分布は，

$$\Pr\{S \leq U_{max} \mid \theta,a\} = \prod_{i=1}^{I}\Pr\{V_i(\theta,a)+\varepsilon_i(\theta,a) \leq U_{max}\} \tag{13}$$

で与えられ，ε_i にワイブル分布を仮定し，期待満足度を $S(\theta,a) = E[\max U_i]$ とすると，

$$S(\theta,a) = \log\sum_i\exp(V_i(\theta,a)) \tag{14}$$

となる。式(14)は，ランダム効用モデルにおける消費者余剰を表わすと考えられており[4]，また，本研究のアプローチにおいても，式(7)の共役関数を得る過程で消費者余剰最大化問題として $S(\theta,a)$ が得られることが判る。

参考文献

(1) Florian, M and S. Nguyen : A combined trip distribution modal split and trip assignment model. (1978)
(2) Rockafellar, R.T. : Convex Programming and Systems of Elementary Monotonic Relations, (1967)
(3) Daganzo, C. : Multinominal Probit, (1979)
(4) Williams, H. : On the formulation of travel demand models and economic evaluation measures of user benefit.