Ⅳ-116　都市高速道路の最適規模と料金水準——2車種の場合——

岡山大学　正員　明神　証
〃　〃　○浅井　加寿彦
〃　学生員　阿部　芳典

1. まえがき

収支均衡という制度のもとで消費者余剰最大を最適化規準として都市高速道路の最適規模の決定を山田のモデル[1]に従って考えて来た。その結果，最適解は一般的に需要曲線と平均費用曲線との接点には存在せず，収支均衡を満たす転換交通量の最大を与える点に存在することが判明した[2]。上の結論は転換対象交通を1車種とする場合のものであるが，本文ではこれを2車種に拡張して同様の問題を検討する。車種以外の前提条件および仮定はこれまでと同じである。

2. モデルと定式化

次の関数を導入する。ただし，添字 i は車種を表わす。

・転換対象交通量　$X_i = X_i(s)$,　$X_i'(s) > 0$.　(1)

・総費用関数　$C = C(s)$,　$C'(s) > 0$.　(2)

・需要曲線　$P = f_i(q, s)$.　$(i = \mathrm{I}, \mathrm{II})$　(3)

ここに，規模 s は高速道路の総延長でもって定義し，q は規模 s 料金 P のときの高速道路への転換交通量である。

ここでの最適規模決定の問題は，収支均衡条件のもとで消費者余剰を最大とするところを求めることにある。すなわち，

収支均衡条件：$C(s) = q_{\mathrm{I}} \cdot P_{\mathrm{I}} + q_{\mathrm{II}} \cdot P_{\mathrm{II}}$　(4)

のもとに，

消費者余剰：$S = \int_0^{q_{\mathrm{I}}} f_{\mathrm{I}}(\xi, s)\,d\xi + \int_0^{q_{\mathrm{II}}} f_{\mathrm{II}}(\xi, s)\,d\xi - R(q_{\mathrm{I}}, q_{\mathrm{II}}, s)$　(5)

を最大にする $(q_{\mathrm{I}}, q_{\mathrm{II}}, s)$ を求める。ここで，R は料金収入であって次のようにかくことができる。

$R(q_{\mathrm{I}}, q_{\mathrm{II}}, s) = q_{\mathrm{I}} \cdot f_{\mathrm{I}}(q_{\mathrm{I}}, s) + q_{\mathrm{II}} \cdot f_{\mathrm{II}}(q_{\mathrm{II}}, s)$　(6)

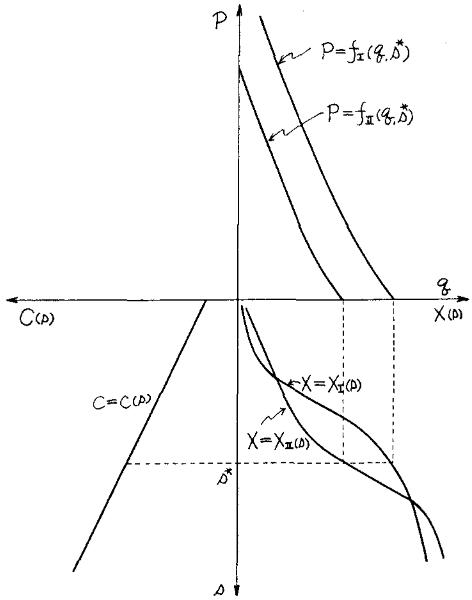


図-1 総費用曲線～転換対象交通量～需要曲線

ラグランジュの未定乗数法を用いることによって解くことができる。すなわち，

$\mathcal{L} = \int_0^{q_{\mathrm{I}}} f_{\mathrm{I}}(\xi, s)\,d\xi + \int_0^{q_{\mathrm{II}}} f_{\mathrm{II}}(\xi, s)\,d\xi - R(q_{\mathrm{I}}, q_{\mathrm{II}}, s) + \lambda\{C(s) - R(q_{\mathrm{I}}, q_{\mathrm{II}}, s)\}$,　λ：ラグランジュ乗数　(7)

$\partial\mathcal{L}/\partial q_i = 0$,　$\partial\mathcal{L}/\partial s = 0$,　$\partial\mathcal{L}/\partial\lambda = 0$.　$(i = \mathrm{I}, \mathrm{II})$　(8)

3. 特定の需要曲線による最適解の導出

式(8)の第1式を $i=\mathrm{I}$ について求めると，

$\partial\mathcal{L}/\partial q_{\mathrm{I}} = f_{\mathrm{I}}(q_{\mathrm{I}}, s) - \partial R/\partial q_{\mathrm{I}} + \lambda(-\partial R/\partial q_{\mathrm{I}}) = 0$　(9)

$\partial R/\partial q_i \neq 0$ とすると，ラグランジュ乗数 λ は次のように交通量の需要弾力性 η_{I} を用いて表わせる。

$\lambda = -1/(1+\eta_{\mathrm{I}})$,　$\eta_{\mathrm{I}} = (f_{\mathrm{I}}(q_{\mathrm{I}}, s)/q_{\mathrm{I}}) \cdot \partial q_{\mathrm{I}}/\partial f_{\mathrm{I}}(q_{\mathrm{I}}, s) \neq -1$　(10)

$i=\mathrm{II}$ についても $\lambda = -1/(1+\eta_{\mathrm{II}})$ となり，解が存在するならば λ は同値であるから，

$\eta_{\mathrm{I}} = \eta_{\mathrm{II}} \neq -1$　(11)

すなわち，交通量の需要弾力性の等しいところに最適解が存在する。ちなみに，$\partial R/\partial q_i \neq 0$ と $\eta_i \neq -1$ は同意である。

今，山田等によって提案された次の需要曲線を導入する[3]。ところで，$1/\alpha_i$ は「高速道路を平均トリップ長だけ

$$P_i = f_i(q, s) = \{\ln A_i X_i(s) - \ln q\}/\alpha_i \quad , \quad A_i \cdot \alpha_i：定数 \qquad (12)$$

走行する場合に得られる短縮時間の価値」であると山田によって意味づけされている。さて，式(11)を求めると

$$A_I X_I(s)/q_I = A_{II} X_{II}(s)/q_{II} \quad , \quad \alpha_I P_I = \alpha_{II} P_{II} \qquad (13)$$

となる。ここで，上式の第1式の分数式を $r \equiv A_i X_i(s)/q_i$ と定義する。

式(8)の第4式を求めると，これは式(4)の収支均衡条件にほかならず，式(12)，(13)を用いて書き直すと，

$$D(s) = -r \ln r \quad , \quad D(s) \equiv C(s)/\{A_I X_I(s)/\alpha_I + A_{II} X_{II}(s)/\alpha_{II}\} \qquad (14)$$

上式を満たす (r, s) が収支均衡経路 $r = r(s)$ であるが，これは陽な関数として示すことができない。いま，$D(s)$ が下に凸な単純な曲線の場合を示したものが図－2である。

式(8)の第3式を式(12)の需要曲線を用いて求めると，

$$\partial L/\partial s = \lambda\{C'(s) - \partial R/\partial s\} = 0$$

式(10)より $\lambda \neq 0$ であることが言えるので，上式より

$$C'(s) = \partial R/\partial s = (1/\alpha_I) X_I'(s) \cdot q_I/X_I(s) + (1/\alpha_{II}) X_{II}'(s) \cdot q_{II}/X_{II}(s) \qquad (15)$$

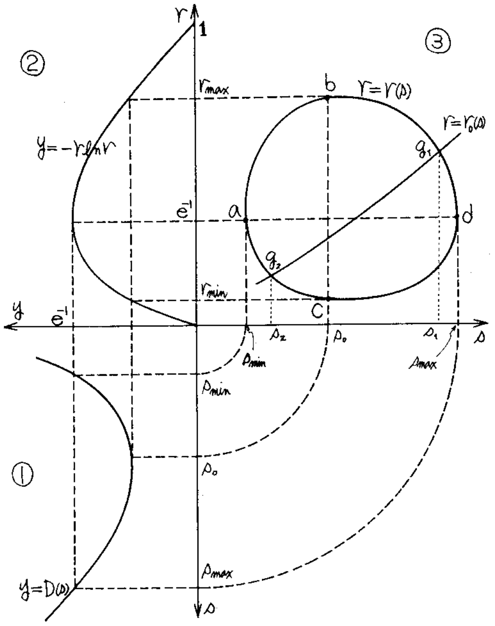
これは次のように解釈できる。

「規模の限界費用」＝「車種ごとに（高速道路を平均トリップ長だけ利用したとき得られる短縮時間の価値）×（規模の限界転換交通量）を加えたもの」

式(15)は式(13)を用いて，r を s の関数として表わせる。

$$r = C'(s)/\{X_I'(s) A_I/\alpha_I + X_{II}'(s) A_{II}/\alpha_{II}\} \equiv r_0(s) \qquad (16)$$

$r = r_0(s)$ の形状は，$C(s)$ および $X_i(s)$ に依存すると言える。ここで，$C''(s) \geq 0, X_i''(s) \leq 0$（ただし，同時に等号は成立せず）の場合を考えると，$r_0(s)$ は単調増加関数となり，また



図－2. 収支均衡経路 $r=r(s)$ と $r=r_0(s)$

s_{min}, s_0, s_{max} においてそれぞれ $r_0(s) < e^{-1}$，$r_{min} < r_0(s) < e^{-1}$，$r_0(s) > e^{-1}$ の範囲にあることが言えるので，図－2の③のように $r = r_0(s)$ を描ける。この図－2の③の収支均衡経路 $r = r(s)$ と $r = r_0(s)$ の交点に最適解が存在する。

ところで，式(5)を s について微分すると，次式のようになる。

$$dS/ds = \{X_I'(s) A_I/\alpha_I + X_{II}'(s) A_{II}/\alpha_{II}\}\{r(s) - r_0(s)\}/\{1 + \ln r(s)\} \qquad (17)$$

これより，$r = r(s)$ が abd をとる場合，$s_{min} < s < s_1$ では消費者余剰は増大し，s_1 で極大値をとり，$s_1 < s < s_{max}$ で減少する。$r = r(s)$ が acd のとき，$s_{min} < s < s_2$ で減少，s_2 で極小値，$s_2 < s < s_{max}$ で増大する。したがって，s_1 が最適規模であり，式(12)，(13)よりこのときの料金水準および転換交通量が求まる。

式(13)の第2式より2車種の料金比 P_I/P_{II} が α_{II}/α_I という一定値をとることがわかるが，$1/\alpha_i = \delta_i t_i \hat{l}_i$ という関係が山田によって導出されているのでこれを用いると料金比は次のようになる。

$$P_I/P_{II} = \delta_I t_I \hat{l}_I / \delta_{II} t_{II} \hat{l}_{II}$$ ，δ_i：時間価値，$t_i = 1/v_i - 1/v_i'$：単位距離当り短縮時間，$\hat{l}_i$：平均トリップ長

t_i は車種によって余り変らないと考えることができれば，時間価値が高く平均トリップ長の長い車種は通行料金が高くなることになる。

〈参考文献〉

1). 山田浩之；都市高速道路の最適規模と料金水準，高速道路と自動車，Vol. XI，No.9，P.19～22，1968-9.
2). 明神・浅井；都市高速道路の最適規模 ―ある需要曲線と平均費用曲線との接点の性質―，第33回中四支部大会講演概要集.
3). 上掲1)の他，佐佐木綱；阪神高速道路における均一料金額の決定，高速道路と自動車，Vol. XI，No.2，P.19～29，1968-2.