

IV-37 *Elastica* の曲線の曲線設置

日本大学工学部 正員 木村喜代治

(1) まえがき：著者は第35回年講(IV-173)において路線の平面線形要素として *Elastica* の曲線を提案した(曲線の名称はここでもそれにならうことにする)。またこの曲線は河川の自由蛇行形状によく合致しているのど、蛇行河川の改修の際の法線形状として適当と思われる。そこで、それらの場合に *Elastica* の曲線を設置しようとするときに必要とする計算について述べる。

(2) 基本式：Fig.1を参照し、曲率半径 P 、長さの次元を有する定数(パラメーター) A とすると基本式は

$$\rho = -A^2 \quad (1)$$

この曲線は円積分によって表され、周期関数で示される(母数 k が1のとき周期性は失われる。このときこの解は初等関数によって容易に表される。しかしここに利用する場合にあまり関係ないと思われるのでここでは示れない)。この曲線を大別すると変曲点のある場合(このとき変曲点は必ず x 軸上にある)と変曲点のない場合になる。

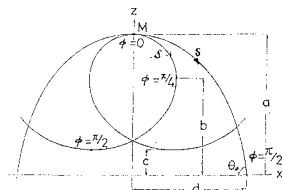


Fig. 1

① 変曲点のある場合：ここに利用しようとする曲線形はほとんどこの曲線に属する。

$$\left. \begin{aligned} s &= AF(R, \phi), \quad x = A[ZE(R, \phi) - F(R, \phi)], \quad z = 2RA \cos \phi = RA \operatorname{cn} u \\ a &= 2RA, \quad R = \sin(\theta_0/2), \quad \sin(\theta/2) = R \sin \phi \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

s は Fig.1 の頂点 M より図の方向に取った任意点までの曲線長、 F , E は円積分、 ϕ はその偏角(または F の振幅)、 θ は曲線と x 軸とのなす角(最大 θ_0)。

② 変曲点のない場合：

$$\left. \begin{aligned} s &= AR F(R, \phi), \quad x = (A/R) \cdot [ZE(R, \phi) - (Z - R^2)F(R, \phi)] \\ s &= (2A/R) \cdot \sqrt{1 - R^2 \sin^2 \phi} = (2A/R) \cdot \operatorname{dn} u, \quad a = 2A/R, \quad C = (2A/R) \cdot \sqrt{1 - R^2} \\ b &= (2A/R) \cdot \sqrt{1 - R^2/2}, \quad R = \sqrt{1 - a^2/C^2}, \quad \theta = 2\phi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(3) 基本関数の数値計算：Clothoid 曲線の場合曲線は1つであるが、*Elastica* 曲線の場合は無数にある。また曲線設置に必要とする各種関数の数値は関数表などによることもできるが、一般にそれらの表は実用上充分でない。そこで実用上充分な精度でそれらの数値を直接計算することを考える。

計算に便利のように長さの量は定数 A で除き、記号へも付け(例へば $s = A/A$ など)、Clothoid 曲線にならって単位 *Elastica* と称する。一般の計算は単位 *Elastica* について行なうことにする。

設置すべき曲線が確定すれば、 A , R などは既知量となる。そのとき曲線上の任意点は、通常ある点(例へば M 点)からその任意点までの曲線長が指定されることが多い。よって必要とする計算は、このある点から指定された任意点の曲線長より、その任意点の諸要素の数値計算である。すなわち、 $F \equiv u$ とすると u と R とから任意点の ϕ を求め、次いで ϕ と R とから $E(R, \phi)$ やその他の要素を計算することになる。

① u , R より ϕ の計算：数値計算の方法として、収束の早いものは下記のようになる(仮に、積分函数論より転記)。

$$\left. \begin{aligned} q &= e^{-\frac{\pi k'}{K}}, \quad v = \frac{u}{2K}, \quad \varphi_1(v) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2q^{n+\frac{1}{2}} \sin\{(2n+1)\pi v\} \\ \varphi_2(v) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2q^{n+\frac{1}{2}} \cos\{(2n+1)\pi v\} - 1, \quad \operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{R}} \frac{\varphi_1(v)}{\varphi_2(v)}, \quad \phi = \sin^{-1}(\operatorname{sn} u) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

② $E(R, \phi)$ の計算：Landen の変換を用いて、 $R_1 = (1-R)/(1+R)$, $\tan(\phi_1 - \phi) = R' \tan \phi$ 以下同様にして

$$E(R, \phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2K} \phi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n}{\prod_{i=1}^n (1+R_i)} \sin \phi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-R_n)}{\prod_{i=1}^n (1+R_i)} F(R_{n-1}, \phi_{n-1}) \quad (5)$$

ただし $R_0 = R$, $\phi_0 = \phi$. m を充分に大きくとると ($R_m \div 0$ 程度まで), 近似的に

$$E(R, \phi) \div \frac{\pi}{2K} \phi_m + \sum_{n=1}^m \frac{R_n}{\prod_{i=1}^n (1+R_i)} \sin \phi_n - \phi_{m-1} \cdot \prod_{n=1}^{m-1} (1+R_n) \sum_{n=1}^m \frac{(1-R_n)(1+R_m)}{2^{(m-n)} \prod_{i=1}^n (1+R_i)^2} \quad (6)$$

$\div \because \pi/2K = 1 / \prod_{n=1}^{m-1} (1+R_n)$, $\phi_m \div 2\phi_{m-1}$. 例へば $m=5$ とすると

$$E(R, \phi) \div \left\{ \frac{1}{(1+R_1)(1+R_2)(1+R_3)(1+R_4)} - \frac{1-R_4}{2(1+R_1)(1+R_2)(1+R_3)} - \frac{(1-R_3)(1+R_4)}{4(1+R_1)(1+R_2)} - \frac{(1-R_2)(1+R_3)(1+R_4)}{8(1+R_1)} \right. \\ \left. - \frac{(1-R_1)(1+R_2)(1+R_3)(1+R_4)}{16} \right\} \phi_4 + \frac{R_4}{(1+R_1)(1+R_2)(1+R_3)(1+R_4)} \sin \phi_4 + \frac{R_3}{(1+R_1)(1+R_2)(1+R_3)} \sin \phi_3 \\ + \frac{R_2}{(1+R_1)(1+R_2)} \sin \phi_2 + \frac{R_1}{(1+R_1)} \sin \phi_1 \quad (7)$$

この式による計算精度は $R \leq 0.99$ で小数7桁まで, $R = 0.999$ で小数6桁まで, $R = 0.9999$ で小数5桁まで正確である。

③ $F(R, \phi)$ の計算: 比較的容易に計算され, 例へば楕円函数論(互逆)1によつて

$$F(R, \phi) = \prod_{n=1}^{\infty} (1+R_n) \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n / 2^n) \quad (8)$$

m を充分大きくとり ($R_m \div 0$, $\phi_m = 2\phi_{m-1}$ 程度まで), 例へば $m=5$ とすると

$$F(R, \phi) \div \prod_{n=1}^m (1+R_n) (\phi_m / 2^m) \div (1+R_1)(1+R_2)(1+R_3)(1+R_4) (\phi_4 / 2^4) \quad (9)$$

(4) 曲線設置: ここでは変曲点のある場合について述べる。ただし下記の①は変曲点のない場合も含まれる。
設置始点は Fig. 1 の M 点でよいが, 多軸の平行移動などによりどのようなにも取れる。特に変曲点のある場合 Fig. 2 の O 点を始点とすることも取扱ってみた。このとき式(2)の A , X などは

$$\hat{A} = A/A = K(R) - F(R, \phi) \\ \hat{X} = X/A = \{2E(R, \pi/2) - K(R)\} - \{2E(R, \phi) - F(R, \phi)\} = \hat{A} - \hat{X}_1 \quad (2')$$

曲線設置は, その設置始点からの曲線長が指定されることが多い。そのとき式(2), (2'), (3) の A の式から $F(R, \phi) \equiv U$ が与えられ, これより式(4)から ϕ が計算される。任意点を m 点とする。

① 座標による方法: 式(2), (2'), (3) より所要の X_m , Y_m を求める。

② 極座標による方法: Fig. 2 を参照し, 原点 O より Y_m , L_m による。なお, Y_m の代わりに接線より的小れ角 ($\theta_0 - Y_m$) を用いてもよい。

③ Y_m と $(m-1)$ 点から弦長 $\hat{X}_m$ による方法 (Fig. 2 参照)。

④ Fig. 3 の O 点および O' 点より的小れ角 Y_m , δ_m による方法

⑤ Fig. 3 の O 点および O' 点より的小れ角 Y_m , δ_m による方法

⑥ 弦 OM より的小れ角 α_m , β_m による方法 (Fig. 4 参照)

⑦ トラベースによる方法

その他幾何の問題として種々考えることができる。

(5) まとめ: 曲線設置のうち, 直線と円とを結ぶ緩和曲線や *Elastica* の2曲線の接続条件などについては前報(35回年報 IV-173)で述べたのでここには記さない。ここに述べた諸計算は実用上十分な精度で, プログラム計算のできる小型電卓によって計算することができる。*Elastica* の曲線は図上でスチールテープ片のような弾性薄板を用いて容易にその概型を知ることができる。

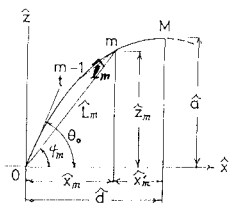


Fig. 2

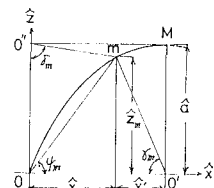


Fig. 3

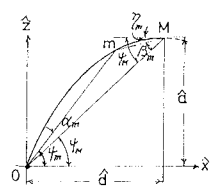


Fig. 4