

東京電機大学 理工学部 正会員 近津 博文

1 まえがき 従来、ダム貯水量の算出方法としては、方眼法や台形公式、シンプソンのオーおおよびオニ公式、さらには長方形公式や三角形公式が知られている。ところで、いずれの方法を採用するにしても精度の良い値を算出するためには、標高を読み取るべき格子点数を著しく増さなければならない。春日屋は数値積分法、特に機械的縦線法(mechanical quadratures)を応用して長方形領域内に指定された4地点または8地点での標高を読み取るにより、長方形領域内での体積を算出する公式を誘導し(それぞれ全領域4点法および8点法と名づけた)、さらに春日屋・近津は地形学的特性の異なる種々の地形例を用いて公式の適用性を明らかにした。

ところで、以上の各研究は領域の形状を長方形とした場合である。そこで、本研究では領域が不規則な形状をなすダム湛水面に対して機械的縦線法を応用してダム貯水量を算出する方法を考える。

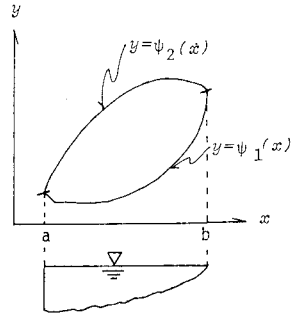


Fig.1

2 機械的縦線法によるダム貯水量の計測方法 x, y 軸を Fig.1 のように選ぶ、ある等高線までの満水面を基準面とし、 y 軸の原点を基準面上に置くと、地表面の方程式を

$$y = f(x, y) \quad \text{----- (1)}$$

$$a \leq x \leq b, \quad \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)$$

とすると、ダム貯水量 V は

$$V = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy \quad \text{----- (2)}$$

となる。ここで

$$y = \frac{\psi_2(x)}{2}(1+u) + \frac{\psi_1(x)}{2}(1-u) \quad \text{----- (3)}$$

$$-1 \leq u \leq 1$$

と変数変換を施すと(2)式は

$$V = \frac{1}{2} \int_a^b \{ \psi_2(x) - \psi_1(x) \} dx \int_{-1}^1 f(x, \phi(x, u)) du \quad \text{----- (4)}$$

となり、さらに

$$x = \frac{b-a}{2}(1+t) + \frac{a+b}{2}(1-t) \quad \text{----- (5)}$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

と変数変換を施すと(4)式は

$$V = \frac{b-a}{4} \int_{-1}^1 \Phi_1(t) dt \int_{-1}^1 \Phi_2(t, u) du \quad \text{----- (6)}$$

となる。次に $\Phi_1(t)$ および $\Phi_2(t, u)$ をマクローランの級数に展開すると

$$\Phi_1(t) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p t^p \quad \text{----- (7)}$$

$$\Phi_2(t, u) = \sum_{m,r=0}^{\infty} a_{m,r} t^m u^r \quad \text{----- (8)}$$

であるから(ただし、 a_p および $a_{m,r}$ は定数)結局

(2)式は

$$V = \frac{b-a}{4} \sum_{p=0}^{\infty} a_p \sum_{m,r=0}^{\infty} a_{m,r} \int_{-1}^1 t^{m+p} u^r dt du$$

$$= \frac{b-a}{4} \sum_{p=0}^{\infty} a_p \sum_{m,r=0}^{\infty} a_{m,r} \left[\frac{t^{m+p+1}}{m+p+1} \right]_{-1}^1 \left[\frac{u^{r+1}}{r+1} \right]_{-1}^1$$

$$\text{----- (9)}$$

となる。

いま、領域 $-1 \leq t \leq 1, -1 \leq u \leq 1$ 内に選んだ n 個の点 (t_i, u_i) での標高差を

$$H_i = z_i = \sum_{m,r=0}^{\infty} a_{m,r} t_i^m u_i^r \quad \text{----- (10)}$$

とし、各標高差に対する重みを意味する定係数 W_i を用いて次式

$$V = B \sum_{i=1}^n Y_i W_i H_i \quad \text{----- (11)}$$

ただし、 $B = b-a, Y_i = \psi_2(x_i) - \psi_1(x_i)$

が(9)式に等しくなるように t_i, u_i および W_i を選ぶこととする。ところで

$$V = B \sum_{i=1}^n Y_i W_i H_i = B \sum_{i=1}^n W_i \left(\sum_{p=0}^{\infty} a_p t_i^p \sum_{m,r=0}^{\infty} a_{m,r} t_i^m u_i^r \right) \quad \text{----- (12)}$$

であるから、

(9)式と(12)式とを等しいと置くと、両式において $p=0, 1, 2, 3 \dots$ の場合に対してそれぞれ $m, r=0, 1,$

Tab.1

P	P=0				P=1				P=2				P=3				P=4			
	N=2	N=3	N=4	N=5	N=2	N=3	N=4	N=5	N=2	N=3	N=4	N=5	N=2	N=3	N=4	N=5	N=2	N=3	N=4	N=5
$\sum W_i$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\sum W_i T_i$	1/3	1/3	1/3	1/3	2/3	2/3	2/3	2/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3	3/3
$\sum W_i U_i$	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3
$\sum W_i T_i^2$			1/5	1/5	1/5	2/5	2/5	2/5	1/5	2/5	3/5	3/5	2/5	3/5	4/5	4/5	3/5	4/5	5/5	5/5
$\sum W_i T_i U_i$			1/9	1/9	1/9	2/9	2/9	2/9	1/9	2/9	3/9	3/9	1/9	2/9	3/9	3/9	1/9	2/9	3/9	3/9
$\sum W_i U_i^2$			1/5	1/5		1/5	1/5		1/5	1/5			1/5	1/5			1/5	1/5		
$\sum W_i T_i^3$						1/7			1/7	2/7			1/7	2/7	3/7		1/7	2/7	3/7	4/7
$\sum W_i T_i^2 U_i$							1/15			1/15	2/15		1/15	2/15	3/15		1/15	2/15	3/15	4/15
$\sum W_i T_i U_i^2$							1/15			1/15	2/15			1/15	2/15			1/15	2/15	
$\sum W_i U_i^3$																				
$\sum W_i T_i^4$																				
$\sum W_i T_i^3 U_i$																	1/9		1/9	2/9
$\sum W_i T_i^2 U_i^2$																	1/21		1/21	2/21
$\sum W_i T_i^2 U_i^2$																	1/25		1/25	2/25

ただし $N=m+r$, $\sum_{i=1}^N 1 = N$, $T_i = t_i^2$ および $U_i = u_i^2$ である。

2, 3, ----と順次に代入して得られる t_i , u_i に関する連立方程式を解けばよいわけである。いま, $p=0$ の場合について考え, 得られる方程式を列挙すると,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N W_i &= 1, \quad \sum_{i=1}^N W_i t_i = \sum_{i=1}^N W_i u_i = 0, \quad \sum_{i=1}^N W_i t_i^2 = \sum_{i=1}^N W_i u_i^2 = 1/3, \quad \sum_{i=1}^N W_i t_i u_i = 0 \\ \sum_{i=1}^N W_i t_i^3 &= \sum_{i=1}^N W_i t_i^2 u_i = \sum_{i=1}^N W_i t_i u_i^2 = \sum_{i=1}^N W_i u_i^3 = 0, \quad \sum_{i=1}^N W_i t_i^4 = \sum_{i=1}^N W_i u_i^4 = 1/5 \\ \sum_{i=1}^N W_i t_i^2 u_i^2 &= 1/9, \quad \sum_{i=1}^N W_i t_i^3 u_i = \sum_{i=1}^N W_i t_i^2 u_i^2 = \sum_{i=1}^N W_i t_i^3 u_i^2 = 0 \quad \text{---- (13)} \end{aligned}$$

が得られる。この場合の t_i , u_i および W_i の各値は春日屋により誘導された長方形領域の場合と一致する。他, $p=1, 2, 3, \dots$ について地表面を2次, 3次, 4次および5次曲面とした場合の連立方程式を整理するとTab.1となる。

Tab.1の連立方程式を $-1 \leq t_i \leq 1$, $-1 \leq u_i \leq 1$ および根の対称性を考慮しつつ解いた結果, 春日屋により誘導された $p=0$ の場合以外に $p=1$, かつ $N=2$ の場合の根が実用的であることが判明した。そこで, 新たに(11)式に示される公式において $p=0$ の場合をそれぞれ4点法および8点法とし, $p=1$ の場合を新4点法と呼ぶこととする。 $p=0$ および $p=1$ の場合の t_i , u_i および W_i の各値はTab.2に示す通りである。

Tab.2

4点法	8点法	新4点法
$T_1 = 1/3$	$T_1 = 7/15$	$T_1 = 2/3$
$U_1 = 1/3$	$U_1 = 7/15$	$U_1 = 1/3$
$W_1 = 1/4$	$W_1 = 10/49$	$W_1 = 1/4$
	$W_2 = 9/196$	

ただし $T = t^2, U = u^2$

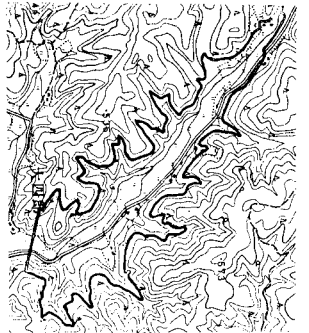


Fig.2

3 新4点法の適用性 地形図上に任意に想定したAダム (Fig.2) およびBダム (Fig.3) の各ダムについて4点法, 8点法および新4点法の適用性を検討する。まず, Tab.2に示された各方法の t_i , u_i に対応する x, y 座標を求め, 各点での標高を地形図上から読み取る。次に, 等高線で囲まれた不規則な形状を有する領域の x 軸方向の幅 (B), および上記により定められた各 x 座標上での y 軸方向の領域の幅 (Y_i) を読み取り, (11)式によ, 4点法, 8点法および新4点法の各場合についてダム貯水量を算出する。さらに, 台形公式により算出された値を真値と仮定して, それらの誤差の百分率を求めた結果がTab.3である。Tab.3より下記のことかわかる。すなわち, 新4点法を使用し算出したダム貯水量はAダムおよびBダムについて約10%の誤差で算出される。以上より, 新4点法は誤差約10%の範囲で適用でき, 実用的にむずかしい調査の段階で十分に適用できると思われる。本研究に使用した地形図は国土地理院発行の2.5万地形図を複製したものである。

Tab.3

Name	Errors	EV4 (%)	EV8 (%)	NEV4 (%)
A dam $V=6755000, (m^3)$		22.52	11.33	10.92
B dam $V=17872496, (m^3)$		21.47	48.41	-10.65

Fig.3

