Ⅳ-12　三辺測量による基準点増設の位置誤差について

阿南高専　正会員　滝根 文司

§：1 目的　既知点より新しい基準点を距離の測定，方向角の観測により増設するとき，与点の図形的配点状態により求める点の位置誤差について考察し，選点時の計画の参考にしようとする。

§：2　観測方程式

2点 (1), (2)，を結ぶ正しい距離をS_0，この辺を測距儀などで観測した値をSとする。これには必ず誤差が含まれているので，その補正値Vを観測値に加えて正しい値に等しくなる，即ち　$S_0 = S + V$　(1)

距離を測る目的は単に2点間の距離を求めることでなく，これらの点の正しい座標を求めることである。これらの座標の概算値を，X_1', Y_1', X_2', Y_2'，とする。概算値に対する補正値を，x_1, y_1, x_2, y_2，とすると $X_1 = X_1' + x_1$　Y_1　$Y_1' + y_1$　などが成立する。x_1, y_1, x_2, y_2　などは平均計算によって求める，最終的な目的の未知量である概算値を使って，(1)，(2)　間の概算辺S'は，　$S' = \{(X_1' - X_2')^2 + (Y_1' - Y_2')^2\}^{\frac{1}{2}}$　(2)

S'に補正 ΔS　を加えたものが正しい辺長 S_0　になる　$S_0 = S' + \Delta S$　(3)

(1) と (3) より　$S' + \Delta S = S + V$　(4)　この式のΔSは　$X_1 = X_1' + x_1$，$Y_1 = Y_1' + y_1$　……などの中の，x_1, y_1が，概算値に対する補正値で一般に小さい量であるから　$S_0 = S' + \Delta S = S' + \partial S'/\partial X_1 \cdot x_1 + \partial S'/\partial X_2\, x_2 + \partial S'/\partial Y_1\, y_1 + \partial S'/\partial Y_2\, y_2$　(5)　x_1, y_1, x_2, y_2　の係数は (2)式より

$$\partial S'/\partial X_1 = \partial/\partial X_1 \{(X_1' - X_2')^2 + (Y_1' - Y_2')^2\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\{(X_1' - X_2')^2 + (Y_1' - Y_2')^2\}^{\frac{1}{2}}} \times 2(X_1' - X_2')$$

$$= (X_1' - X_2')/S' = c_{12}$$

同様にして，$\partial S'/\partial X_2' = -(X_1' - X_2')/S' = c_{21}$　$\partial S'/\partial Y_1' = (Y_1' - Y_2')/S' = d_{12}$　$\partial S'/\partial Y_2' = -(Y_1' - Y_2')/S' = d_{21}$

$c_{21} = -c_{12}$，$d_{21} = -d_{12}$　である。よって点 (1)，(2) を結ぶ測距の観測方程式は，次のように示される

$$c_{12} x_1 + c_{21} x_2 + d_{12} y_1 + d_{21} y_2 + l_{12} = V_{12} \qquad (6)$$

§：3　位置誤差

(6) を一般化し，点 i，j を結ぶ測距の観測方程式は，$c_{ij} x_i + c_{ji} x_j + d_{ij} y_i + d_{ji} y_j + l_{ij} = v_{ij}$　となりこれを行列表示にすると

$$V = AX - L.P$$

V：残差行列　A：係数の行列　X：未知数の行列
L：定数項行列　P：重量の行列

この最小2乗解は，標準方程式　$BX = R$　($B = A^T A$　$R = A^T L$)　より　$X = B^{-1}R$　が得られる。この解は　$X = B^{-1} A^T L$　とかけるから　Xは観測値Lの線形方程式である。従って，観測値Lに誤差があれば　$\delta X = B^{-1} A^T (\delta L)$　となる。δLの誤差が正確にわかっていればXの誤差を簡単に求めることができる。列ベクトルLの L_gだけに誤差があり，しかも，その誤差が正確にわかっているとき，その値を単位にとると，列ベクトル　Xの誤差は

$$(\delta X^g) = B^{-1} A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftarrow g\text{番目}$$

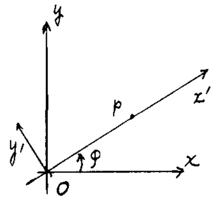
で求まる。列ベクトルXのi番目のX_i の誤差について考える　Lのすべてに誤差があり，しかも正確にわかっているとし，それを単位にとり，これをσ_0として，δX_i = ($B^{-1} A^T$のi行の要素の和) × (σ_0 相当の誤差) すなわち，X_i の分散は，B^{-1}, A^T のi行の要素の二乗和として求められる。$\sigma_{X_i}^2 = (B^{-1} A^T)(B^{-1} A^T)$の$(i, i)$要素 × σ_0^2，これを変形すると

$$\sigma_{X_i}^2 = (A^T A)^{-1} A^T A (A^T A)^{-1} \text{の } i\text{行，}i\text{列の要素} \times \sigma_0^2 = \{(A^T A)^{-1}\} \text{の } i\text{行 } i\text{列の要素} (Q_{ii}) . \sigma_0^2$$

となるから　σ_{X_i}　は　B^{-1}の対角線要素，(i, i)がQ_{ii}　であることがわかり　$\sigma_{X_i}^2 = \sigma_0^2 Q_{ii}$　となる。

X_i と X_j の間の共変分散は、$B^{-1}A^T$ の i 行と j 列の要素の積の和であり、これは、$(B^{-1}A^T)(B^{-1}A^T)^{-1}$ の i, j 要素、すなわち、B^{-1} の (i, j) 要素である。

§：4 誤差楕円



X, Y 座標系により表示されている P の位置誤差は、X 軸及び y 軸方向の分散、σ_x^2, σ_y^2 ならびに共変分散 σ_{xy} の関数で表わされる。一般に未知量が線形関数

$$F = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots\cdots + f_nx_n$$

で近似できるなら、その誤差 σ_F^2 は

$$\sigma_F^2 = \sigma_{x_1}^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \sigma_{x_2}^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2 + \cdots\cdots \sigma_{x_n}^2\left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right) + 2\sigma_{x_1x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial M}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right) + 2\sigma_{x_1x_3}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x_3}\right) + \cdots\cdots$$

で求まるから、Ox 軸から、φ 方向にある三角点 P の位置誤差 σ_M^2 は、$x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$ から

$$\sigma_M^2 = \sigma_{x_1}^2 = \sigma_x^2\cos^2\varphi + \sigma_y^2\sin^2\varphi + 2\sigma_{xy}\sin\varphi\cos\varphi = \begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{bmatrix}$$

この式から、σ_M は、φ の大きさ、すなわち P 点の位置する方向により、その大きさが異なることがわかる。この二次曲線を標準形になおすと、誤差曲線の形が明かになる。

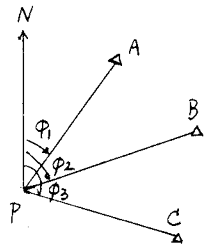
誤差の最大（最小）値を表わす固有値（λ）は次の固有方程式を解いて

$$\begin{vmatrix}\sigma_x^2 - \lambda & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 - \lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) \pm \frac{1}{2}\left\{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4\cdot\sigma_{xy}^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

その方向は $\tan 2\varphi = 2\sigma_{xy} / (\sigma_x^2 - \sigma_y^2)$ より求まる。この φ 方向を、新しい X 軸として、この X 軸から θ の方向にある P 点の位置誤差は、$\sigma_\theta^2 = \sigma_{\lambda_1}^2\cos^2\theta + \sigma_{\lambda_2}^2\sin^2\theta$ で表わされ、この曲線は σ_{λ_1} σ_{λ_2} を軸とする楕円である。

§：5 計算例



(a) 三辺測定により、既知点 A, B, C より P 点の位置を決める場合、§：2 の観測方程式は

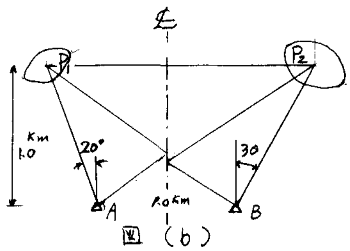
$$\begin{cases} v_1 = a_1x + b_1y - l_1 \\ v_2 = a_2x + b_2y - l_2 \\ v_3 = a_3x + b_3y - l_3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_i &= -\rho/S_i \sin\varphi_i \qquad \rho : 206265 \\ b_i &= \rho/S_i \cos\varphi_i \end{aligned}$$

P 点の位置誤差は §：3 より　$Q_{xx} = Q_{YY} = Q_{xy} = \{[aa] + [bb]\} / \{[aa][bb] - [ab]^2\} = Q_p$

(1)	$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_3 - \varphi_2 = 60°$	$S_i = 1.0^{km}$	$Q_p = 1.33\ /\rho^2$
(2)	$\varphi_1 = 20°$ $\varphi_2 = 40°$ $\varphi_3 = 80°$	$S_1 = S_2 = S_3 = 1.0^{km}$	$Q_p = 2.34\ /\rho^2$
(3)	$\varphi_1 = 20°$ $\varphi_2 = 40$ $\varphi_3 = 80°$	$S_1 = S_2 = 1.0^{km}$, $S_3 = 2.0^{km}$	$Q_p = 5.52\ /\rho^2$

(b) 四辺形の場合

	Q_{xx}	Q_{yy}	Q_{xy}	φ	誤差楕円の長軸と短軸	
P_1：	2.22	1.74	1.44	28.34°	1.195	0.752
P_2：	2.63	2.89	2.25	-33.5°	1.576	1.145



図（b）

まとめ：図 (a) の場合、正三角形が最も図形的配置がよいことがわかるが、辺長、方向角により複雑に影響することがわかる。図 (b) は、対称形の図を、左右半分ずつ書いた。側辺の角が、20°, 30° の場合につき、誤差楕円を示す。P_1P_2 が、$\overline{AB}$ の2倍になる P_2 点の誤差は大きくなっていることがわかる。