Ⅳ-10　三辺測量における図形調整の必要十分条件式を機械的に求める一方法

山形工業高等学校　正会員　町田憲一

まえがき　三辺測量の図形調整は図形の交角の条件式（以下単に条件式と言う）を媒介にして辺長の誤差方程式を立てこれを最小2乗法で解き辺長の最確値を求める方法を採っている。この場合に図形調整の条件式数は $m-2S+3$（但し m：測定辺長数、S：測点数）で与えられるが条件式そのものについては何ら明らかにされない。図形を完全に調整するための過不足のない必要にして十分な条件となる条件式（以下単に必要十分条件式と言う）についての文献は見当らない様である。一般に図形が複雑になると必要十分条件式を捜すことは容易でない。本論は図形を基本図形と複合図形に分け前者については総ての条件式を吟味して必要十分条件式を定め後者については前者に基づき種々の図形の条件式を帰納して必要十分条件式を求める法則を見出しさらに図形の接合部の必要十分条件式を明らかにし以て一般図形についての表題の方法を提示するものである。

基本図形の必要十分条件式　図形調整を必要とするどのような複雑な図形もFig 1のような4種の基本図形より成る。これらの図形の総ての条件式を吟味した結果各々の必要十分条件式は次のように表わせる。但し以下の交角αはこれの属する三角形の辺長から余弦法則等により求められる値である。

Ⅰ型　$\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_{n-2}=\alpha_{n-1}$　1個

Ⅱ型　$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots\cdots+\alpha_n=2\pi$　1個

Ⅲ型　次の(1)〜(7)の中の任意の1個

$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$ (1)　$\alpha_4+\alpha_5=\alpha_6$ (2)、$\alpha_7+\alpha_8=\alpha_9$ (3)、$\alpha_{10}+\alpha_{11}=\alpha_{12}$ (4)

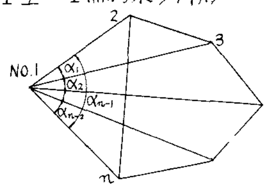
$\alpha_3+\alpha_6+\alpha_9+\alpha_{12}=2\pi$ (5)、$\alpha_1+\alpha_{11}=\alpha_5+\alpha_7$ (6)、$\alpha_2+\alpha_4=\alpha_8+\alpha_{10}$ (7)

Ⅳ型　次の(1)〜(4)の中の任意の1個

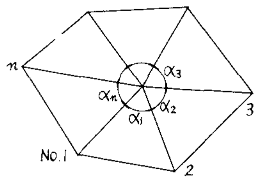
$\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3$ (1)、$\alpha_4+\alpha_5=\alpha_6$ (2)、$\alpha_7+\alpha_8=\alpha_9$ (3)、$\alpha_{10}+\alpha_{11}+\alpha_{12}=2\pi$ (4)

Fig 1

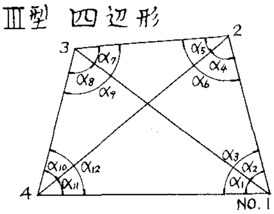
Ⅰ型　1点拘束多角形



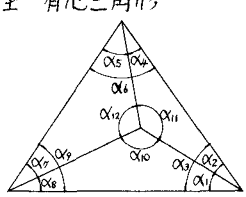
Ⅱ型　有心多角形



Ⅲ型　四辺形



Ⅳ型　有心三角形



Ⅰ〜Ⅳ型とも上記以外の条件式はこの中のどれかと全く同じものになる。Ⅰ.Ⅱ型は特に問題ないのでⅢ.Ⅳ型について補足する。Ⅲ型の場合、例えば(1)の条件式を採れば他の条件式を総て満足する。何故ならば三角形134と123を合せた四辺形1234において(1)があれば(3)を満足し従って同じ四辺形から(2)(4)も満足する。また(5)(6)(7)は各々(1)(3)、(1)(2)、(2)(3)の組合せによって満足する。他のいずれの条件式1個を採っても他の条件式を全部満足することを証明し得る（詳細は省略）。

Ⅳ型の場合、例えば(1)の条件式を採れば他の条件式を総て満足する。何故なら大きい三角形において(1)があれば(2)(3)は満足する。また小さい3個の三角形の交角の和より(4)は満足する。他のいずれの条件式1個を採っても他の条件式を全部満足することを証明し得る（詳細は省略）。結局基本図形の必要十分条件式は上記1個であり従来の条件式数の公式より得られる数に一致する。

複合図形の必要十分条件式　基本図形が絡み合わされた複合図形は千差万別の型が考えられる。この複合図形の必要十分条件式を求めるには図形を基本図形に分解しその各々が過不足なく必要十分条件式を満足するように定めればよい。種々の複合図形の条件式を吟味して帰納した結果次のように法則化できる。

複合図形の必要十分条件式は条件式数の最も多い測点（2点以上ある場合はその中の任意の1点）における条件式の総てである。但し測点における条件式とはその測点に交会する2個以上の交角を拘束する関係式でありその数は拘束される数に等しい。

上記法則によりどのような複合図形でも必要十分条件式を容易に求め得る。Fig 2. 3.4の必要十分条件式の一例を挙げれば次のようになる。図の測点の（　）の数字はその測点における条件式数を示す。

Fig 2：条件式数の最も多いNO.3において $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_5$, $\alpha_5+\alpha_3+\alpha_4=\alpha_6$（または$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=\alpha_6$ でも同じ）の2個．Fig 3：NO.1～5とも同じ条件式数であるからどの測点を選んでもよいが今No.2を考えれば $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_4$, $\alpha_2+\alpha_3=\alpha_5$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha_6$（または$\alpha_3+\alpha_4=\alpha_6$ あるいは$\alpha_1+\alpha_5=\alpha_6$ でも同じ）の3個．Fig 4：No.1～5のいずれの測点を選んでもよいが今No.5を選べば $\alpha_2+\alpha_3=\alpha_5$, $\alpha_3+\alpha_4=\alpha_6$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=2\pi$（または$\alpha_1+\alpha_4+\alpha_5=2\pi$ または$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_6=2\pi$ でも同じ）の3個 となる。Fig 2.3.4ともこの条件式のみで総ての基本図形の必要十分条件式を過不足なく網羅している（checkは省略）。そして複合図形の必要十分条件式数は従来の条件式数の公式より得られる数に一致する。

Fig 2

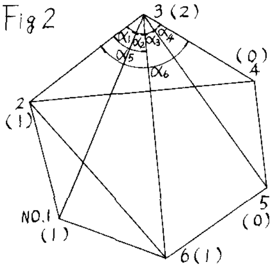


Fig 3

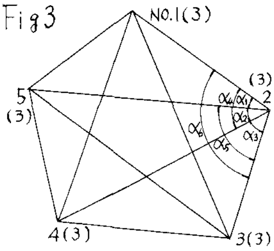
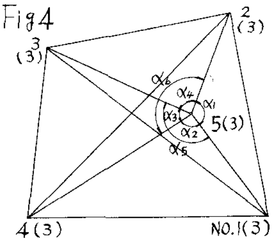


Fig 4



<u>図形の接合部の必要十分条件式</u>　　基本図形または複合図形が1点で隙間なく接合する場合はその点において新たにⅡまたはⅣ型の必要十分条件式が1個生じる。接合する図形が各々必要十分条件式を満足していればその接合する1点に関して任意のⅡまたはⅣ型の必要十分条件式を採ってよい。

<u>一般図形の必要十分条件式</u>　　基本図形と複合図形の接合した一般図形の必要十分条件式は上述した基本図形と複合図形および接合部の必要十分条件式の総てになる。これを表題の方法としてまとめれば次のようになる。

図形調整の必要十分条件式を機械的に求めるには与えられた図形を基本図形Ⅰ Ⅱ Ⅲ Ⅳ型および複合図形に区分しさらにこれらの接合部をもⅡまたはⅣ型に組み入れてその各々の必要十分条件式を総て取り出せばよい。またその数は従来の条件式数の公式より得られる数に一致する。

<u>ある一般図形の必要十分条件式</u>

Fig 5

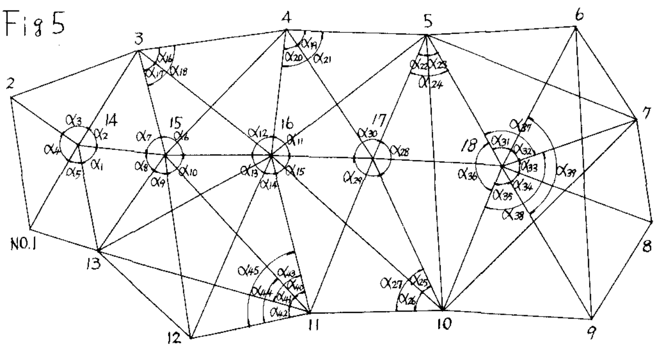


Fig 5のような複雑な一般図形の必要十分条件式を本方法により求めその一例を示せば次のようになる。（　）はⅡ.Ⅳ型の芯を表わす。
Ⅰ型, 無し　Ⅱ型, 1.2.3.15.13(14)で $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=2\pi$, 接合部 3.16.13.14(15)で $\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9+\alpha_{10}=2\pi$, 接合部 4.17.11.15(16)で $\alpha_{11}+\alpha_{12}+\alpha_{13}+\alpha_{14}+\alpha_{15}=2\pi$, Ⅲ型, 3.4.16.15で $\alpha_{16}+\alpha_{17}=\alpha_{18}$, 4.5.17.16で $\alpha_{19}+\alpha_{20}=\alpha_{21}$, 5.18.10.17で $\alpha_{22}+\alpha_{23}=\alpha_{24}$, 16.17.10.11で $\alpha_{25}+\alpha_{26}=\alpha_{27}$. Ⅳ型, 接合部 5.10.16(17)で $\alpha_{28}+\alpha_{29}+\alpha_{30}=2\pi$, 接合部 5.7.10(18)で $\alpha_{37}+\alpha_{38}+\alpha_{36}=2\pi$, 複合図形, 11.12.13.15.16で NO.11を選び $\alpha_{40}+\alpha_{41}=\alpha_{43}$, $\alpha_{41}+\alpha_{42}=\alpha_{44}$, $\alpha_{40}+\alpha_{41}+\alpha_{42}=\alpha_{45}$, 5.6.7.8.9.10.18で No.18において $\alpha_{31}+\alpha_{32}=\alpha_{37}$, $\alpha_{33}+\alpha_{34}+\alpha_{35}=\alpha_{38}$, $\alpha_{32}+\alpha_{33}+\alpha_{34}=\alpha_{39}$ の計15個．なお従来の公式より得られる条件式数は $m=48$, $S=18$ であるから $m-2S+3=48-2\times18+3=15$, 従って両者の数は一致する。

<u>あとがき</u>　　本方法によればどのような複雑な図形についても図形調整の必要十分条件式を機械的に容易に求め得る。これらの総てを連立に解けば厳密に図形は調整されることになる。また本論より見たる従来の条件式数の公式は図形調整の必要十分条件式数を示すものと言える。最後に筆者の先の論文概要※に錯誤があったので本論においてこれを訂正し改めて本方法の批判を仰ぐ次第である。

※三辺測量の図形調整における従来の条件式数を示す公式が誤りであることの証明（第34回年次学術講演会講演概要集第4部）