III-304　$q = Kx^m y^n$ とした場合のクイの微分方程式に関する二，三の考察

基礎地盤コンサルタンツ(株)　正員　水本 邦男

1、はじめに　筆者は前回の報告(第35回，III-183)において、地盤反力の関数形に $q = Kx^m y^n$ を仮定した場合、杭の水平載荷試験結果から定数 K, m, n を算定する方法、および逆の場合としてこれらの定数が既知の場合に最大曲げモーメント等の杭の計算に必要な諸種の値を算定する方法を示した。そしていずれの場合においても算定のもととなる資料は基準解であった。従って基準解についてはその信頼性に対して厳密な検討を行なわなければならない。特に本算定法による変換則は、解が無限遠点において収束することを前提としている。それ故、基準解の収束性の検証は極めて重要なこととなる。そこで今回はこの問題に重点を置き、$m = 0$ の場合の解の収束性の検証法、および $m \neq 0$ の場合の基準解の求解法を示す。

2、$y^{(4)} = -y^n$　$(0 < n < 1)$ の場合の解の収束性の検証法

まず、$m = 0$ の場合の解について、収束条件を満足する解についてのみ成り立つ二，三の関係を求める。

微分方程式 $y^{(4)} = -y^n$ において、いま仮りに無限遠点における収束条件を満足する解 $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$ が得られたとする。さらにこの解は $x = 0$，および $x = x_1$ で、

$$y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0 \quad , \quad y''(0) = y_0'' \quad , \quad y'''(0) = y_0''' \qquad (1)$$

$$y(x_1) = y_1 \quad , \quad y'(x_1) = y_1' \quad , \quad y''(x_1) = y_1'' \quad , \quad y'''(x_1) = y_1''' \qquad (2)$$

であったとする。次にこの解に対して次式の変換を行う。

$$\left.\begin{aligned} Y &= y_1 y \\ X &= y_1^{\frac{1-n}{4}} x \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

この結果、変換された微分方程式および式（1）の値は

$$Y^{(4)} = -Y^n \qquad (4)$$

$$Y(0) = y_1 \quad , \quad Y'(0) = 0 \qquad (5)$$

$$Y''(0) = y_1^{\frac{1+n}{2}} y_0'' \quad , \quad Y'''(0) = y_1^{\frac{1+3n}{4}} y_0''' \qquad (6)$$

となる。さて、もとの解，$y(x)$, $y'(x)$ 等は、収束条件を満足しているのであるから、式(3)によって変換された $Y(X)$, $Y'(X)$ 等も、また収束条件を満足している。従って、式（4）を式（5）の境界条件、および、無限遠点において収束するという条件のもとで解けば、その解は $y(x)$ の　$x \geqq x_1$　の範囲の解、すなわち、$X = x - x_1$　とすれば，　$Y(X) = y(x)$　となる。よって式（6）の値は

$$Y''(0) = y''(x_1) \quad , \quad Y'''(0) = y'''(x_1) \quad , \quad すなわち$$

$$y_1^{\frac{1+n}{2}} y_0'' = y_1'' \qquad (7)$$

$$y_1^{\frac{1+3n}{4}} y_0''' = y_1''' \qquad (8)$$

となる。逆に式（7），（8）の関係が存在すれば，その解は収束条件を満足することが保証される。

次にこの解の周期性について調べてみる。まず，式（2）の値に式（3）の変換を行なった場合の値を求めてみると、x_1 に対応する X_1 は

$$X_1 = y_1^{\frac{1-n}{4}} x_1 \qquad (9)$$

また、$y(x_1)$，$y'(x_1)$，$y''(x_1)$，$y'''(x_1)$ に対応して、それぞれ

$$Y(X_1) = y_1^2 \qquad (10)$$

$$Y'(X_1) = 0 \qquad (11)$$

$$Y''(X_1) = y_1^{\frac{1+n}{2}} y_1'' = (y_1^{\frac{1+n}{2}})^2 y_0'' \qquad (12)$$

$$Y'''(X_1) = y_1^{\frac{1+3n}{4}} y_1''' = (y_1^{\frac{1+3n}{4}})^2 y_0''' \tag{13}$$

が得られる。またこれらの値は $x = x_1 + X_1 = (1 + y_1^{\frac{1-n}{4}}) x_1$ における $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$ の値であることは明らかである。すなわち、x_1を最初の一周期の長さとすれば、式（10）～（13）は二周期目の終り（三周期目の始まり）における$y(x)$等の値である。そこで同様の操作によってN周期目の終りの座標x_N，および $y(x_N)$ などを求めると

$$x_N = \sum_{N=1}^{N} (y_1^{\frac{1-n}{4}})^{N-1} x_1 \tag{14}$$

$$y(x_N) = y_1^N \tag{15}$$

$$y'(x_N) = 0 \tag{16}$$

$$y''(x_N) = (y_1^{\frac{1+n}{2}})^N y_0'' \tag{17}$$

$$y'''(x_N) = (y_1^{\frac{1+3n}{4}})^N y_0''' \tag{18}$$

となる。以上のことから次のことが結論される。

イ）周期長は等比級数をなして次第に減小してゆく。従って周期長の総和は有限値を有することとなり、その値は $x_1 / (1 - y_1^{\frac{1-n}{4}})$ で与えられる。すなわち、収束解は無限遠点において収束するのではなく、有限の点で収束する。

ロ）周期長が等比級数をなして減少することに応じて、y，y'，y''，y''' などの値も一周期毎に減小し、その減小のしかたは同じく等比級数をなす。しかし公比は各微分値について同一ではない。

などである。

3、$y^{(4)} = -x^m y^n$　（$0 \leqq m \leqq 1$，$0 < n < 1$）の数値解の求解法

前節で述べたように、$y^{(4)} = -y^n$ の場合、その解は有限の点で収束する。この性質を利用することにより、$y^{(4)} = -x^m y^n$ の収束解は比較的簡単に求めることができる。以下にその方法の概略を示す。

$y^{(4)} = -y^n$ の収束解が有限の点で収束するならば $y^{(4)} = -x^m y^n$ の収束解も、また有限の点で収束するはずである。そこで、$y^{(4)} = -x^m y^n$ の収束点をx_Rとし、Δを極めて小さい正数として、$x_R' = x_R - \Delta$ なるx_R'をとる。そして解くべき微分方程式を便宜上、次の二つに分けて考える。

$$y_1^{(4)} = -x^m y_1^n \quad (0 \leqq x \leqq x_R') \tag{19}$$

$$y_2^{(4)} = -x^m y_2^n \quad (x_R' \leqq x < x_R) \tag{20}$$

なお、言うまでもなく、式（19）と（20）の4階までの導関数はすべて$x = x_R'$で連続である。

さて、式（20）において、$x_R - x_R' = \Delta$が極めて小さければ、その区間内については $x^m = x_R'^m$ と考えて差し支えない。従って小さいΔを仮定すれば式（20）は近似的に次のように書き変えることができる。

$$y_2^{(4)} = -x_R'^m y_2^n \quad (x_R' \leqq x < x_R) \tag{21}$$

ここで式（21）に次の境界条件を与えてみる。

$$y_2(x_R') = \eta \ , \ y_2'(x_R') = 0 \tag{22}$$

式（21）が式（22）の境界条件を満足し、さらに収束条件をも満足するなら、この場合の収束点x_L'は、

$$x_L' = x_R' + (\eta^{1-n} / x_R'^m)^{\frac{1}{4}} X / 1 - Y_1^{\frac{1-n}{4}} \tag{23}$$

で与えられる。ここにX_1，Y_1は前節 イ）における x_1，y_1 の値である。また明らかに，$x_L' > x_R$であるから、

$$x_L' - X_R' = (\eta^{1-n} / x_R'^m)^{\frac{1}{4}} X_1 / 1 - Y_1^{\frac{1-n}{4}} > X_R - X_R' = \Delta \tag{24}$$

となる。従って真の収束解に限りなく近い値は$\Delta \to 0$ すなわち $(\eta^{1-n} / X_R'^m) \to 0$ とすれば良いこととなる。

4、おわりに　今回は紙面の都合上、具体的な数値解を用いて検証法等を例証することができなかったが、これは発表日に行うこととする。