III-245　非線形粘性材料の応力解析について

清水建設　正会員　○　黒田　英高
名古屋大学　工学部　学生員　篠川　俊夫
名古屋大学　工学部　正会員　川本　眺万

1) はじめに　トンネル掘削へのNATMの適用あるいは原子力発電の圧力容器等、近年構造工学、土木工学の分野において材料の粘性効果を無視できない問題が多くなり、この問題に対する関心が高まってきている。そして、この問題を説明するには従来の粘弾性理論単独では不十分であり、粘弾塑性問題として考えることが必要である。しかし、粘弾性論と塑性論を組合せた粘弾塑性論は、Naghdi および Murch[1], Perzyna[2] らによって発表されているが、理論的にはまだ確立されておらず、実際の問題に適用するには困難な点が多い。そこで、粘弾塑性体の挙動を記述する方法として、粘弾性体に適当な降伏条件をあてはめ、現象論的にその挙動をとらえる方法が現実的である。すなわち、ひずみを含めた降伏条件を用いることによって時間の経過に伴う降伏域の進展を解析しうる。具体的には、解析対象としてトンネル掘削問題を考え、Reiner-Weissenberg の降伏条件[3]を Voigt モデルに適用して時間的な降伏域の進展を追跡した。

2) Reiner-Weissenbergの降伏条件　一般に塑性論では、von-Mieses, Tresca, Mohr-Coulomb の条件などが降伏条件として用いられるが、これらは降伏判定の基準として応力を考えている。ところが粘弾塑性体の場合、応力増分がなくてもクリープ現象の進行によりひずみが増加し塑性域が進展するので、応力によってのみ降伏判定をすることはできない。そこで、降伏判定の基準としてエネルギーを選び、Mieses-Hencky の降伏条件を粘弾性体に拡張し、つぎのような降伏条件を考える（Reiner-Weissenberg の降伏条件）。

「物体の単位体積あたりに弾性エネルギーとして貯えられるせん断力による仕事がある値（限界せん断弾性エネルギーR）に達したときに降伏が生じる」

図－1(a)のようなMaxwell型3要素モデルに対するReiner-Weissenbergの降伏条件は、つぎのようになる。3要素モデルの全せん断エネルギーは、ばねの部分とMaxwell要素の部分の和として表わされるから、

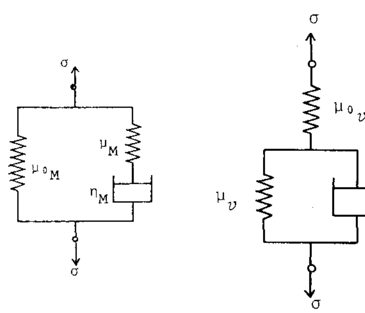
$$w = w_0 + w_M \tag{1}$$

ここで、wは全エネルギー，w_0はばねのエネルギー，w_MはMaxwell要素のエネルギーである。w_0は弾性体のエネルギーであるのでつぎのように表わされる。

$$w_0 = \mu_{0M}\varepsilon^2 = \sigma_0/4\mu_{0M} \tag{2}$$

また、$\dot{w}_M$はつぎのように表わされる。

$$\dot{w}_M = \sigma_M\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_M\dot{\sigma}_M}{2\mu_M} + \frac{\sigma_M^2}{\eta_M} \tag{3}$$



(a) Maxwell型　(b) Voigt型

図－1　3要素モデル

式(3)の第2項はダッシュポットによる逸散エネルギーであるので、Reiner-Weissenberg の降伏条件より降伏に関与しない。よって式(2),(3)より降伏に関与するせん断弾性エネルギーはつぎのようになる。

$$w_c = \frac{\sigma_0^2}{4\mu_{0M}} + \frac{\sigma_M^2}{4\mu_M} = \mu_{0M}\varepsilon^2 + \frac{(\sigma - 2\mu_{0M}\varepsilon)^2}{4\mu_M} \tag{4}$$

そして、式(4)のw_cが限界せん断弾性エネルギーRに達すると降伏が生じると考える。

降伏判定を考える場合、Voigt 型モデルの方が概念的に考えやすいので、本報告では解析モデルとしてVoigt

型モデルを用いた。Zenerのレオロジー方程式より、MaxwellモデルとVoigtモデルの係数間の関係が与えられる。これによってReiner-Weissenbergの降伏条件をVoigt型3要素モデルに適用する場合のせん断弾性エネルギーW_cはつぎのようになる。

$$W_c = \frac{\mu_{ov}\mu_v}{\mu_{ov}+\mu_v}\varepsilon^2 + \frac{\{(\mu_{ov}+\mu_v)\sigma - 2\mu_{ov}\mu_v\varepsilon\}^2}{4\mu_{ov}^2(\mu_{ov}+\mu_v)} \qquad (5)$$

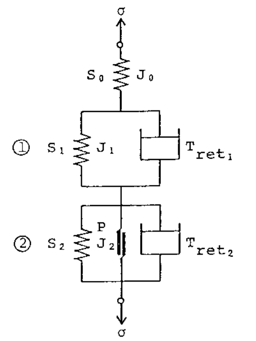
また、Reiner-Weissenbergの降伏条件は、Drucker-Pragerの降伏条件との対応において圧縮性材料に拡張することも可能である。なお、限界せん断弾性エネルギーRは、クリープ試験，定ひずみ速度試験等から求められる。

3) トンネル掘削問題への適用　粘弾性問題の有限要素解析には、赤木ら[4]の定式化を用い、レオロジーモデルとしては、図－2に示す一般化Voigtモデルの修正型を用いた。このモデルの考え方はつぎのようである。

i) 時刻$t=0$において荷重が作用したときばねS_0によって瞬間弾性応答を示す。

ii) 時間の経過につれてクリープまたは応力緩和現象が生じ、応力，ひずみが変化する。この間は、ばねS_0とVoigt要素①だけが応答しVoigt型3要素モデルとして挙動する。

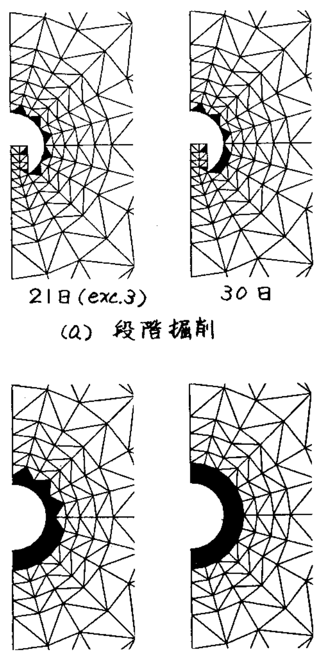
iii) 応力、ひずみの状態がReiner-Weissenbergの降伏条件を満足したとき、スライダーPがはずれVoigt要素②が加わり、以後Voigt型5要素モデルとして挙動する。



図－2　解析モデル

解析対象としては、粘着力のみに依存し塑性成分が非圧縮性の材料において、地下100mに直径6mの円形トンネルを掘削する場合を考えた。解析ケースは、段階掘削と全断面掘削の2ケースである。

図－3より、時間の進行に伴い降伏域が進展していくのがわかる。同じ掘削時間での降伏域の広がりは、全断面掘削の方が段階掘削に比べて大きい。このことは、段階掘削の方が全断面掘削に比べて地山をいためることが少ないことを表わしている。



図－3　降伏域の進展

4) おわりに　本報告では、従来解析的には取扱うことが困難であった時間依存性の降伏現象をReiner-Weissenbergの降伏条件を非線形粘弾性体に適用することによって可能にした。これによって粘弾塑性体の挙動を現象論的に把握することが可能になったと考えられる。今後は、ライニングを施工した場合，圧縮性材料に適用した場合についても解析を進める予定である。

最後に、本報告をまとめるにあたり、多くの御指導を賜った豊田工専赤木知之助教授および名古屋大学地盤工学教室市川康明助手に感謝の意を表わします。

（参考文献）

(1) Naghdi, P.M. and Murch, S.A., J. Appl. Mech. Vol.30, pp.321-328, (1963)

(2) Perzyna, P., Advances in Appl. Mech. Vol.9, Academic Press, pp.244-300, (1966)

(3) Reiner, M., J. Mech. Phys. Solids, Vol.8, pp.255-261, (1960)

(4) 赤木知之ら，土木学会論文報告集214号，(1973)