

京都大学工学部 正員 田村 武

1. はじめに

多次元圧密現象に対する解析的な研究は、従来よりそのほとんどが等方的な応力-ひずみ関係を仮定している。しかし、現実の地盤や粘土試料には異方性を示すものも少なくなく、これらを考慮した研究が必要であると思われる。ここでは横等方性 (transversally isotropic) 線形弾性体を構造骨格にもつ粘土を想定し、①簡単な境界条件下での圧密方程式を導きながら圧密の進行の速さに対する異方性の影響を調べるとともに、②一般的な境界条件下での圧密についても、二の考察を記す。

2. 横等方性弾性体の応力-ひずみ関係

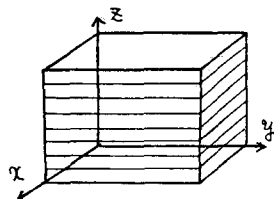


図-1

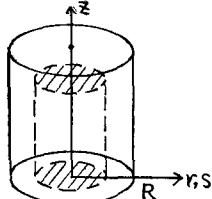


図-2

図-1に示すように成層面を $x-y$ 平面にとり、鉛直上向きを z 軸とする。横等方性材料の(有効)応力-ひずみ関係は次式のように表わすことができる。

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{xx} \\ \sigma'_{yy} \\ \sigma'_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_1-2C_2 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ C_1-2C_2 & C_1 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ C_3 & C_3 & C_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで $C_1 \sim C_5$ は独立な弾性定数であるが、ひずみエネルギーが正值であるためには

$$0 < C_2 < C_1, \quad 0 < C_4, C_5, \quad 0 < (C_1 - C_2)C_5 - C_3^2 \quad (2)$$

を満足しなければならない。とくに等方性の場合には λ, μ をLamé定数として次式が成立する。

$$C_1 = C_5 = \lambda + 2\mu, \quad C_2 = C_4 = \mu, \quad C_3 = \lambda \quad (3)$$

3. 側面排水円柱砂供試体の圧密 (図-2 参照)

もっとも簡単な例として側面のみから排水する円柱供試体を考える。一般に、半径 S の円周上のみに面げき

水圧 $u = \delta(r, s)$ [δ はデルタ関数]があるときの体積ひずみを $\Theta(r, s)$ とすると、圧密方程式は

$$\int_0^R \Theta(r, s) \frac{\partial u}{\partial t}(s, t) ds = -\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 u(r, t) \quad (4)$$

となるから $\Theta(r, s)$ さえ求めればよい。ここに k, γ_w はそれぞれ透水係数、水の単位体積重量である。さて、この $\Theta(r, s)$ は等方性の場合とほとんど同じ方法で計算することができる。すなわち $u = \delta(r, s)$ に対する変位 u として、半径、鉛直方向成分をそれぞれ

$$u_r(r, s) = -\frac{1}{C_1} H(r, s) + A_s r + B_s \frac{1}{r} \quad (5)$$

$$u_z(z, s) = Q_s z \quad (6)$$

とおく。ここに A_s, B_s, Q_s は s によって決まる定数である。式(5)の初は、半径方向のつりあい条件を満たすように定めたものである。式(5), (6)より体積ひずみは

$$\Theta(r, s) = -\frac{1}{C_1} \delta(r, s) + 2A_s + Q_s \quad (7)$$

となるから、境界条件より A_s, Q_s を求めればよい。いま考える例では $r=0$ における変位が有限であることから $B_s \equiv 0$ であり、あと $r=R$ で $\sigma_{rr}=0$ および上端における条件 $\int_0^R r(\sigma'_{zz} + \delta) dr = 0$ から A_s, Q_s が定まる。両者を具体的に書けば

$$\frac{2C_2}{C_1} \frac{S}{R^2} + 2(C_1 - C_2)A_s + C_3 Q_s = 0 \quad (8)$$

$$\frac{C_1 - C_3}{C_1} \frac{S}{R^2} + C_3 A_s + \frac{C_5}{2} Q_s = 0 \quad (9)$$

となる。これを解いて式(7)に代入すると

$$\textcircled{H}(r,s) = -\frac{1}{c_1} \delta(r,s) - 2 \frac{(c_1-c_3)^2 - c_2(c_1-c_5)}{c_4\{c_5(c_1-c_2) - c_3^2\}} \frac{s}{R^2} \quad (10)$$

として $\textcircled{H}(r,s)$ が定まり、これを式(4)に代入して

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2 \frac{(c_1-c_3)^2 - c_2(c_1-c_5)}{c_5(c_1-c_2) - c_3^2} \frac{1}{R^2} \int_0^R S \frac{\partial u}{\partial t} ds = \frac{k c_1}{\gamma_w} \nabla^2 u \quad (11)$$

なる圧密の方程式が得られる。ここで $R c_1 t / \gamma_w R^2$ なる時間係数を新たに α とおいて無次元化すると上式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \int_0^1 S \frac{\partial u}{\partial t} dS = \nabla^2 u \quad (12)$$

と書くことができる。上式では

$$\alpha = 2 \frac{(c_1-c_3)^2 - c_2(c_1-c_5)}{c_5(c_1-c_2) - c_3^2} \quad (13)$$

であるが、等方性の場合には $\alpha = 8\mu / 3\lambda + 2\mu$ となる。また $c_5 \rightarrow \infty$ とすれば $\alpha = 2c_2 / c_1 - c_2 = 2\mu / \lambda + \mu$ となって鉛直変位を拘束した等方性の場合に帰着する。

式(12)に従う圧密の連立は、級数解のオー項の指数関数 $e^{-\lambda t}$ にある λ_1 (最小固有値) の大小で決まるが、それは

$$\frac{J_0(\sqrt{\lambda})}{J_1(\sqrt{\lambda})} = \frac{\alpha}{1 + \alpha/2} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (14)$$

の最小根として定まる。ここに J_0, J_1 はそれぞれの次の 1 次の Bessel 関数である。図-3 には式(14)の左辺の関数と $1/\sqrt{\lambda}$ のグラフを示す。

いま特殊場合として $c_3 = c_1 - 2c_2$ かつ水平面内の Poisson 比を $1/3$ とし $c_5/c_1 = \beta$ とおけば、式(14)は

$$\frac{J_0(\sqrt{\lambda})}{J_1(\sqrt{\lambda})} = \frac{2\beta}{4\beta - 1} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (15)$$

となる。ただし式(2)の制

約より $\beta > 1/4$ でなければならぬ。図-3 と式(15)より β が大きくなれば、つまり鉛直方向の剛性が大きくなれば、鉛直変位 (次下量) は減少するが、圧密の速さは増すことがわかる。

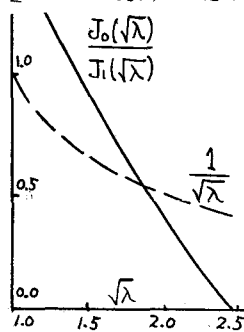


図-3

等方性無限体中の 1 質に $u = \delta(x, x)$ なる均等き水圧が作用すると $r = |x - x|$ として

$$U_i(x, x) = \frac{1}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (i=1, 2, 3) \quad (16)$$

なる変位と、それに伴う

$$\textcircled{H}(x, x) = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} \delta(x, x) \quad (17)$$

なる体積ひずみが発生する。一般的な境界条件のもとでは $\textcircled{H}(x, x)$ に付加項 $\Lambda(x, x)$ を加えて

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + 2\mu) \int \Lambda(x, x) \frac{\partial u}{\partial t} dV = \frac{(\lambda + 2\mu)k}{\gamma_w} \nabla^2 u \quad (18)$$

なる形の圧密方程式が導かれる。一、異方性の場合には、式(16)に相当する x 方向、 z 方向の変位が

$$u_x = A \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{b_2}{\sqrt{k_2(x^2 + y^2) + z^2}} - \frac{b_1}{\sqrt{k_1(x^2 + y^2) + z^2}} \right\}$$

$$u_z = A \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{c_2}{\sqrt{k_2(x^2 + y^2) + z^2}} - \frac{c_1}{\sqrt{k_1(x^2 + y^2) + z^2}} \right\} \quad (19)$$

のようになる。ただし y 方向の変位は u_x と同様である。ここに、

$$A = \frac{1}{4\pi c_1 c_4 (k_2 - k_1)}, \quad b_1 = c_4 k_1 - (c_5 - c_3 - c_4)$$

$$b_2 = c_4 k_2 - (c_5 - c_3 - c_4) \quad (20)$$

であり k_1, k_2 は

$$k^2 - \frac{\{c_4^2 + c_1 c_5 - (c_3 + c_4)^2\}}{c_1 c_4} k + \frac{c_5}{c_1} = 0 \quad (21)$$

の根 ($k_1 < k_2$) である。しかし、式(19)からは式(14)のような簡潔な形で $\textcircled{H}(x, x)$ が求まらず、複雑な付加項が連なる。よって一般的な境界条件のもとで式(18)に相当する異方性の圧密方程式を求めることは不可能であると思われる。つまり右辺の $\nabla^2 u$ の係数は、等方性の場合と異なり、境界条件によって変化する。このことは、3. で導いた式(11) ($\nabla^2 u$ の係数には c_1 がある) と鉛直変位のみを許す次元圧密 ($\nabla^2 u$ の係数には c_5 がくる) と比較しても明らかであろう。

参考文献

- 1) 田村 武: 多次元圧密における固有値問題とその応用, 土木学会論文報告集, No. 293, 1980.
- 2) Kobayashi, S. & N. Nishimura: Green's Tensor for Elastic Half-Spaces, 京大工学部紀要, 42-2, 1980.

4. 横等方性粘土の圧密方程式の一般形について