

粒状体の応力・変形特性を粒子構造全体の変化としてとらえるために、粒子の中心を結んで描かれる多角形構造に着目し、粒子接点の発生・消滅にともなう多角形の消滅・発生の挙動を評価するとともに、すべての粒子構造を3角形と4角形としてモデル化することにより、せん断時の応力・ひずみ関係式を誘導した。

1. 粒子構造と応力比 σ_1/σ_3 の関係

アルミ棒混合体の二軸圧縮せん断試験の結果、多角形粒子構造の長軸（最も長い対角線）を l_1 、 l_1 と最大主応力方向とのなす角を α とすると、多角形の長軸 l_1 はせん断の進行とともに最大主応力方向へ顕著な集中傾向を示し、最大主応力方向に細長い多角形が増加することが明らかになっている¹⁾。いまこの l_1 の集中傾向を確率密度分布 $n(\alpha)$ として図-2 のようにモデル化すると、

$$n(\alpha) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{4}{\pi} (1-a) \alpha + a \right\} \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}) \quad \text{---- (1)}$$

ここに、 $a = n(0)/\frac{1}{\pi}$ であり、分布の集中の程度を表わす ($a=1$ で等分布)。

次に、多角形を図-1 に示すような4角形と3角形とで代表させる。図中 δ は長軸 l_1 方向 α と粒子接点角 β の差を表わし、 $\delta = \tan^{-1}(l_2/l_1)$ である。4角形と3角形の存在個数をそれぞれ m_4, m_3 とすると、長軸 l_1 方向の度数分布 $N_4(\alpha), N_3(\alpha)$ は

$$N_4(\alpha) = \frac{m_4}{\pi} \left\{ \frac{4}{\pi} (1-a) \alpha + a \right\} \quad \text{---- (2)} \quad N_3(\alpha) = \frac{m_3}{\pi} \quad \text{---- (3)}$$

と表わされる。ここで3角形は l_1 の方向性がないため等分布と仮定している。

図-1 を参照して $\beta = \alpha \pm \delta$ の関係から、全体の粒子接点角分布 $N(\beta)$ は

$$N(\beta) = \frac{1}{2} \{ 2N_4(\alpha+\delta) + 2N_4(\alpha-\delta) + \frac{3m_3}{\pi} \} = m_4 \{ n_4(\alpha+\delta) + n_4(\alpha-\delta) \} + \frac{3m_3}{2\pi} \quad \text{---- (4)}$$

と表わされ、主応力比 σ_1/σ_3 は次式となる²⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma_3} &= \frac{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\beta) \cos \beta \cos(\beta - \phi_f) d\beta}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} N(\beta) \sin \beta \sin(\beta - \phi_f) d\beta} \\ &= \frac{\cos \phi_f \left\{ (1 + \frac{3}{4} \frac{m_3}{m_4}) \pi + \frac{4}{\pi} (a-1) \cos 2\bar{\delta} \right\} + \sin \phi_f \left\{ (2 + \frac{3}{2} \frac{m_3}{m_4}) + \frac{4}{\pi} (a-1) 3\bar{\delta} \cos 2\bar{\delta} \right\}}{\cos \phi_f \left\{ (1 + \frac{3}{4} \frac{m_3}{m_4}) \pi - \frac{4}{\pi} (a-1) \cos 2\bar{\delta} \right\} - \sin \phi_f \left\{ (2 + \frac{3}{2} \frac{m_3}{m_4}) \right\}} \end{aligned} \quad \text{---- (5)}$$

ここに、 ϕ_f は粒子間摩擦角、 $\bar{\delta}$ は δ の平均値である。

2. 粒子構造の変化と主ひずみ増分 $d\epsilon_1, d\epsilon_3$ の関係

アルミ棒混合体($\phi 5, 8\text{mm}$)の二軸圧縮せん断試験より、主ひずみ $\epsilon_1 = 0$ 図-3. 4角形の消滅・発生のメカニズム

～1.7% の間に粒子接点の発生により消滅(disappear)する多角形の度数分布 $N_d(\alpha)$ 、粒子接点の消滅により発生(generate)する多角形の度数分布 $N_g(\alpha)$ を図-4, 5 に示している。そしてこれらの多角形の消滅・発生の機構は図-3 のように単純化して表わせるようである。いま定常4角

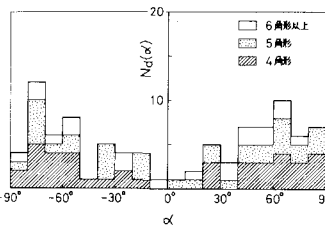


図-4 消滅する多角形の度数分布 $N_d(\alpha)$

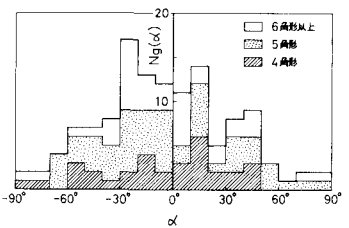


図-5 発生する多角形の度数分布 $N_g(\alpha)$

形(4角形を保ったまま変形する4角形)の角度 δ の変化量の平均値を $\Delta\delta$ とし、図-4 の傾向を考慮して長軸 l_1 方向角 α が大きいほど、消滅せずに残っている定常4角形の個数が多いほど消滅4角形数が多く、3角形の個数が多いほど消滅3角形数が多く、また両者とも角度変化 $\Delta\delta$ が大きいほど多いと仮定すると、消滅する4角形

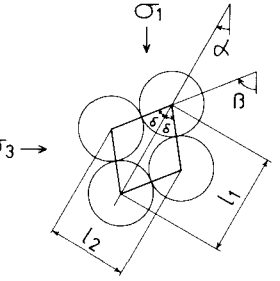


図-1 4角形構造

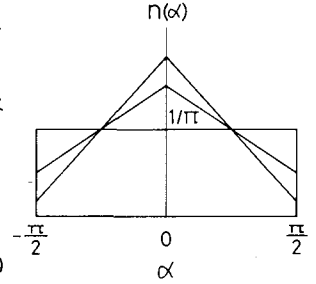
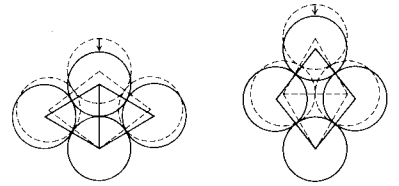


図-2 $n(\alpha)$ のモデル化



消滅 発生

図-3. 4角形の消滅・発生のメカニズム

3角形の度数分布 $N_{4d}(\alpha)$, $N_{3d}(\alpha)$ は次式で与えられる。

$$N_{4d}(\alpha) = \frac{2C_1 m_4 (2-a)}{\pi^2} \cdot \alpha \cdot \Delta\delta \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}) \quad \text{---- (6)}$$

$$N_{3d}(\alpha) = \frac{C_2 m_3}{\pi} \Delta\delta \quad (\alpha \text{によらず等分布}) \quad \text{---- (7)}$$

また、これらに対応して発生する3角形・4角形の度数分布 $N_{3g}(\alpha)$, $N_{4g}(\alpha)$

は図-5の傾向を考慮して次のように表わされる。

$$N_{3g}(\alpha) = \frac{C_1 m_4 (2-a)}{\pi} \Delta\delta \quad (\alpha \text{によらず等分布}) \quad \text{---- (8)}$$

$$N_{4g}(\alpha) = \frac{C_2 m_3}{\pi} (1 - \frac{2}{\pi} \alpha) \Delta\delta \quad (0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}) \quad \text{---- (9)}$$

ここに C_1 , C_2 は、定常4角形の角度変化量 $\Delta\delta = 1$ radian 当りの $N_4(\frac{\pi}{2})$

$N_3(\alpha)$ に対する $N_{4d}(\frac{\pi}{2})$, $N_{3d}(\alpha)$ の割合を意味する。これら多角形の消滅

発生にともなう $N(\alpha)$ の変化を模式的に図-6に示している。同図を参照して

分布の集中度の変化量 $\Delta\alpha$ と定常角度変化量 $\Delta\delta$ の間に次の関係が成り立つ。

$$\Delta\delta = \Delta\alpha / \{ \frac{1}{2}(2-a-\Delta\alpha) \cdot C_2 \cdot \frac{m_3}{m_4} + \frac{1}{2}(2-a)(a+\Delta\alpha) \cdot C_1 \} \quad \text{---- (10)}$$

さて、各4角形の最小主応力面への投影長とその変化量をそれぞれ x_1 , Δx_1 ,

最大主応力面への投影長とその変化量を x_3 , Δx_3 とすると、主ひずみ増分は

$$d\epsilon_1 = \frac{\sum \Delta x_1}{\sum x_1} = \frac{(\sum \Delta x_1)_{\text{定常}} + (\sum \Delta x_1)_{\text{消滅}} + (\sum \Delta x_1)_{\text{発生}}}{\sum x_1} \quad \text{---- (11)}$$

$$d\epsilon_3 = \frac{\sum \Delta x_3}{\sum x_3} = \frac{(\sum \Delta x_3)_{\text{定常}} + (\sum \Delta x_3)_{\text{消滅}} + (\sum \Delta x_3)_{\text{発生}}}{\sum x_3} \quad \text{---- (12)}$$

$$(\sum \Delta x_1)_{\text{定常}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} r(\alpha) \{ N_4(\alpha) - N_{4d}(\alpha) \} \Delta l_1 \cos \alpha \cdot d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} r(\alpha) \{ N_4(\alpha) - N_{4d}(\alpha) \} \Delta l_2 \sin \alpha \cdot d\alpha \quad \text{---- (13)}$$

$$(\sum \Delta x_1)_{\text{消滅}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} N_{4d}(\alpha) \Delta l_1 \cos \alpha \cdot d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} N_{4d}(\alpha) \Delta l_2 \sin \alpha \cdot d\alpha \quad \text{---- (14)}$$

$$(\sum \Delta x_1)_{\text{発生}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} N_{4g}(\alpha) \Delta l_1 \cos \alpha \cdot d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} N_{4g}(\alpha) \Delta l_2 \sin \alpha \cdot d\alpha \quad \text{---- (15)}$$

$$(\sum \Delta x_3)_{\text{定常}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} r(\alpha) \{ N_4(\alpha) - N_{4d}(\alpha) \} \Delta l_2 \cos \alpha \cdot d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} r(\alpha) \{ N_4(\alpha) - N_{4d}(\alpha) \} \Delta l_1 \sin \alpha \cdot d\alpha \quad \text{---- (16)}$$

$$(\sum \Delta x_3)_{\text{消滅}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} N_{4d}(\alpha) \Delta l_2 \cos \alpha \cdot d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} N_{4d}(\alpha) \Delta l_1 \sin \alpha \cdot d\alpha \quad \text{---- (17)}$$

$$(\sum \Delta x_3)_{\text{発生}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} N_{4g}(\alpha) \Delta l_2 \cos \alpha \cdot d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} N_{4g}(\alpha) \Delta l_1 \sin \alpha \cdot d\alpha \quad \text{---- (18)}$$

$$\sum x_1 = (\sum x_1)_{\text{3角形}} + (\sum x_1)_{\text{4角形}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m_3}{2\pi} \sqrt{3} d \cos \alpha \cdot d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{m_3}{2\pi} d \sin \alpha \cdot d\alpha \right) + \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} N_4(\alpha) l_1 \cos \alpha \cdot d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} N_4(\alpha) l_2 \sin \alpha \cdot d\alpha \right) \quad \text{---- (19)}$$

$$\sum x_3 = (\sum x_3)_{\text{3角形}} + (\sum x_3)_{\text{4角形}} = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m_3}{2\pi} d \cos \alpha \cdot d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{m_3}{2\pi} \sqrt{3} d \sin \alpha \cdot d\alpha \right) + \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} N_4(\alpha) l_2 \cos \alpha \cdot d\alpha + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} N_4(\alpha) l_1 \sin \alpha \cdot d\alpha \right) \quad \text{---- (20)}$$

ここに、 $r(\alpha) = 1 - \frac{4}{\pi} \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) で4角形が l_1 方向に圧縮する割合を表わす。(13), (16)式中 $\Delta l_1 = 2d \Delta\delta \cdot \sin \bar{\delta}$, $\Delta l_2 = -2d \Delta\delta \cdot \cos \bar{\delta}$, (14), (17)式中 $\Delta l_1 = 2d(\cos \bar{\delta} - \cos \frac{\pi}{2})$, $\Delta l_2 = 2d(\sin \bar{\delta} - \sin \frac{\pi}{2})$, (15), (18)式中 $\Delta l_1 = 2d\{\cos \frac{\pi}{2} - \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\delta}{2})\}$, $\Delta l_2 = 2d\{\sin \frac{\pi}{2} - \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\delta}{2})\}$, d は平均粒子中心間距離である。これら(11)~(20)式より主ひずみ増分が $\Delta\delta$ を含んだ形で求まり、さらに(10)式の関係から長軸 l_1 の集中度が $\Delta\alpha$ だけ変化する間に生じる主ひずみ増分 $d\epsilon_1$, $d\epsilon_3$ が求まる。また $\Delta\delta$ に対応する構造変化後の3角形数 $m_{3 \text{ next}}$, 4角形数 $m_{4 \text{ next}}$, $\bar{\delta}$ の平均値 $\bar{\delta}_{\text{ next}}$ はそれぞれ次のように与えられる。

$$m_{3 \text{ next}} = m_3 + \{ C_1 (2-a) m_4 - C_2 m_3 \} \Delta\delta \quad \text{---- (21)}$$

$$m_{4 \text{ next}} = m_4 + \frac{1}{2} \{ C_2 m_3 - C_1 (2-a) m_4 \} \Delta\delta \quad \text{---- (22)}$$

$$\bar{\delta}_{\text{ next}} = \left[\bar{\delta} \left\{ 1 - \frac{C_1}{2} (2-a) \Delta\delta \right\} - \frac{1}{3} \left\{ 1-a - \frac{C_1}{2} (2-a) \Delta\delta \right\} \Delta\delta + \frac{C_2}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\delta}{2} \right) \frac{m_3}{m_4} \Delta\delta \right] / \left[1 + \frac{1}{2} \{ C_2 \frac{m_3}{m_4} - C_1 (2-a) \} \Delta\delta \right] \quad \text{---- (23)}$$

以上より、初期構造を表わすパラメータ a_0 , $\bar{\delta}_0$, m_{30}/m_{40} , 構造変化を表わすパラメータ C_1 , C_2 を与えることにより応力-ひずみ関係が算定される。その計算結果を図-7, 8に示している。なお $d\epsilon_v = d\epsilon_1 + d\epsilon_3$ としている。

謝辞 御指導いただいている京都大学防災研究所柴田 徹教授、同足立紀尚助教授に心からの謝意を表します。

参考文献 1) 竹田(1980): 第15回土質工学研究発表会講演集。2) 竹田(1980): 第35回土木学会年次講演会, III-9。

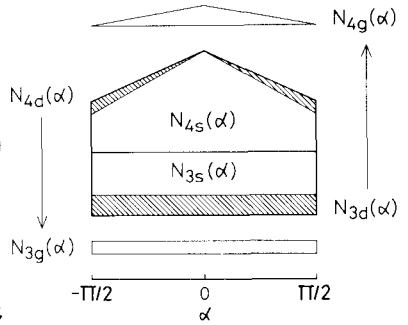


図-6 構造変化のモデル化

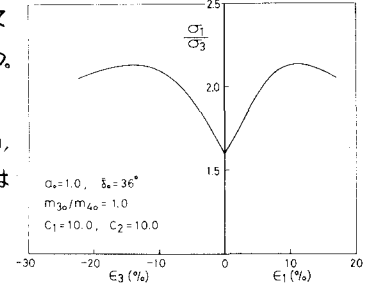


図-7 主応力比~主ひずみ関係($\phi_s = 20^\circ$)

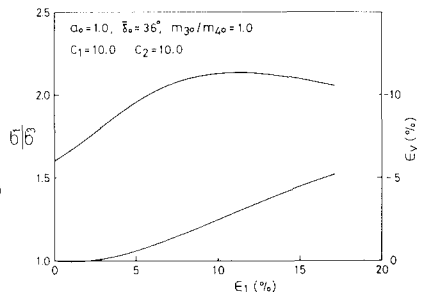


図-8 主応力比~主ひずみ~体積ひずみ関係($\phi_s = 20^\circ$)