

III-4

粒状体の応力比-歪増分比関係式に関する一考察

東北大学工学部 正員 岸野佑次

1. はじめに

粒状体における応力比と歪増分比との関係については、ロスコーら¹⁾をはじめ多くの研究者により種々の研究がなされているが、三主応力の値が全て異なるような一般の応力状態に対して矛盾なく適用することの可能な理論は必ずしも確立されていないように思われる。粒状体におけるエネルギー散逸機構が粒子間の摩擦を伴う滑りによるものとするならば、散逸エネルギーの値の第一近似値は、巨視的平均量である応力テンソル及び歪増分テンソルにより一般的に表わされて然るべきものと考えられる。本文は粒状体を受ける巨視的剪断変形に適合するために粒子間に必然的に発生する微視的滑りに着目し、摩擦則に基づいた塑性エネルギーを空間的に平均することにより全体の塑性エネルギーが一般的に算出されることを示し、これを三軸圧縮及び三軸伸張の応力状態に適用して、応力比-歪増分比関係式を求め、考察を行、たものである。

2. 粒子間摩擦による塑性エネルギー

応力 σ_{ij} の作用している粒状体に平均的歪増分 $D\epsilon_{ij}$ が生じたとする。粒状体を構成している粒子自身は剛体的に変形するので、剪断変形に対しては粒子間に必然的に滑りが発生することになる。図-1のA,B粒子間の接触面(法線 n)に働く法線方向力 $F \cdot n$ は平均的に次式に比例した大きさと考えられる。

$$\sigma_n = n_i n_j \sigma_{ij} \quad (1)$$

また、平均的変形に適合するためにA,B粒子間に生じる相対的な滑り量 Du は接触面における変形の剪断成分

$$D\gamma_n = \sqrt{(n_i n_j \delta_{kl} - n_i n_j n_k n_l) D\epsilon_{ik} D\epsilon_{jl}} \quad (2)$$

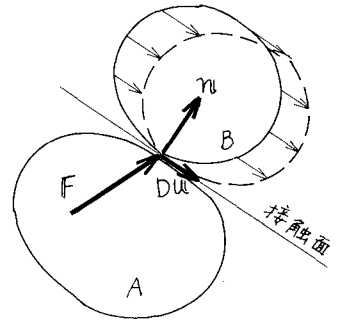


図-1 剪断歪に伴う粒子間滑り

に平均的に比例した大きさをもつ量と考えられる。粒子間の滑りに対して摩擦法則が成立するとすれば、A,B粒子間で散逸するエネルギーは $F \cdot n |Du|$ に比例したものである。このような塑性エネルギーは n_i が $D\epsilon_{ij}$ の主軸方向以外においては必ず発生することから、単位体積当たりの平均的塑性エネルギー増分は

$$DW_p = \oint_A f(n) \sigma_n D\gamma_n da \quad (3)$$

のように与えられる。ここに、 A は単位球面、 $f(n)$ は摩擦係数に対応する量であり、粒状体の構造異質性を考慮すれば、一般に n の関数となる。(3)式中の $D\gamma_n$ は(2)式よりわかるように常に正値であり、 DW_p は剪断変形の方に依存しない関数形となっていることは注目される。応力テンソル及び歪テンソルの主軸が一致し、かつ構造異質性が無視できる場合には(3)式は次のように変形される。

$$DW_p = \frac{K}{\pi} \oint_A \left(\sum_{i=1}^3 n_i^2 \sigma_i \right) \sqrt{\sum_{i=1}^3 (n_i D\epsilon_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^3 n_i^2 D\epsilon_i \right)^2} da \quad (4)$$

ここに、 σ_i , $D\epsilon_i$ は応力テンソル、歪増分テンソルの主値であり、 K は粒子間の摩擦係数及び粒子構造により定まる定数である。(4)式は一般に歪増分テンソルの線形結合として求めることができず、このことは粒状体力学の理論展開の困難さを示唆しているものと思われる。(4)式中の根号部分は偏差歪にのみ関与するので、 $D\epsilon_i$ の代りに、 $D\epsilon_i - c$ (c は任意)を用いても同一の結果を与える。

3. エネルギー保存則と応力比-歪増分比関係式

歪増分 DE_{ij} に伴う応力のなす仕事は全て 2. に述べた粒子間摩擦による塑性エネルギー DW_p となって散逸するものと仮定すれば、次式が成立し、これより応力比-歪増分比関係式を導びくことが可能である。

$$dW_p = \oint_A f(n) \sigma_n D\delta n da = \sigma_{ij} DE_{ij} \quad (5)$$

特に、応力テンソルと歪増分テンソルの主軸が一致し、構造異方性が無視できる場合、三軸圧縮及び三軸伸張の応力状態に対する応力比-歪増分比関係式は次式のように表わされる。

$$\frac{\phi}{p} = M - N \frac{DV}{D\delta} \quad (6)$$

ここに、 $p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$, $\phi = \sigma_1 - \sigma_3$, $DV = DE_1 + DE_2 + DE_3$, $D\delta = DE_1 - DE_3$, M, N は定数である。各応力状態についての演算結果を示せば、表-1 のようになる。

表-1 演算結果

応力状態	三軸圧縮 ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$)	三軸伸張 ($\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$)	備考
σ_n	$n_1^2 \sigma_1 + (1 - n_1^2) \sigma_3$	$(1 - n_3^2) \sigma_1 + n_3^2 \sigma_3$	$\phi_A = 4\pi/15$ ϕ 用いた積分値 (A は単位球面) $\oint_A \sqrt{x^2(1-x^2)} da = \frac{4\pi}{3}$ $\oint_A x^2 \sqrt{x^2(1-x^2)} da = \frac{8\pi}{15}$
$D\delta_n^2$	$(n_1^2 - n_1^4)(DE_1 - DE_3)^2$	$(n_3^2 - n_3^4)(DE_1 - DE_3)^2$	
$\oint_A \sigma_n D\delta n da$	$\frac{4\pi}{15} (2\sigma_1 + 3\sigma_3)(DE_1 - DE_3)$	$\frac{4\pi}{15} (3\sigma_1 + 2\sigma_3)(DE_1 - DE_3)$	
M	$15\phi / (2 - \phi)$	$15\phi / (2 + \phi)$	
N	$3 / (2 - \phi)$	$3 / (2 + \phi)$	

上表より、塑性エネルギーは三軸圧縮、三軸伸張のどちらの場合に対しても $(2\sigma_a + 3\sigma_r) |DE_a - DE_r|$ (a は軸方向、 r は側圧の方向を表わす) に比例していることがわかる。これに対し、ロスコーの理論においては $p |DE_a - DE_r|$ に比例すると考えられている。この相違により、 M と N とが応力状態によって異なる値をとることとなる。いま、三軸圧縮及び三軸伸張に対する M の値を M_c, M_E とおくと、

$$\frac{M_E}{M_c} = \frac{2 - \phi}{2 + \phi} < 1 \quad (7)$$

となり、 $M_E < M_c$ が理論的に成立するが、これに対してロスコーの理論においては M は一定と考えられている。 M_E と M_c の相違については龍岡²⁾ も指摘しており、その大小関係は (7) 式と一致する。更に、本文における (6) 式の勾配 N はロスコーの理論においては 1.5 であるのに対して、本文の式によれば、三軸圧縮の場合に急勾配、三軸伸張の場合には緩勾配となる。

4. あとがき

本文において応力比-歪増分比関係式を実際に求めた応力状態以外の場合の関係式も (4) 式における定数 K を用いて統一的に求めることが可能と思われる。本文における粒状体内部の滑りは、粒状体の剪断変形に伴う、各粒子間に生じる微視的なものと考えらるべきであり、粒子相互の位相関係が保たれないような巨視的な滑りが卓越する場合においては、変形の不均一性を考慮した塑性エネルギーを定義する必要があるものと思われる。

参考文献 1) Roscoe, K. H. et al.: Yielding of Clays in States Wetter than Critical, Géotechnique, 13-3 (1963) pp 211-240, 2) 龍岡文夫: 粒状体力学の現状とその応用について 2-II, 土と基礎, 26-7 (1978) pp 55-63