III-3　　Roweのエネルギー比最小の原理の誘導と考察

東北大学工学部　正員　○新関 茂
同　上　　正員　佐武正雄

1）まえがき

粒状体力学における応力－ダイレイタンシー関係式は，構成方程式の研究における最も重要な関係式の一つであると考えられる．Rowe[1,2]によって提案された応力－ダイレイタンシー式は，実験結果と良い一致を示し，Gibson & Morgenstern[3]，Trollope & Parkin[4]，Roscoe & Schofield[5]，Scott[6]らの関心を集めたが，彼等は一致して，Roweが理論構成の過程で証明なしに用いた「エネルギー比最小の原理」を疑問視した．その後，Horne[7]は，Roweの示唆を受け，粒状体の弾性変形や回転の影響などを無視し，この最小原理の成立することを示した．しかしながら，Mayerhof[8]や最上[9]は，エネルギー比最小の原理と他の力学原理との関係について問題を提起し，また，最近Proctor[10]と徳江[11]はHorneの考察について議論を行っている．Roweの原理は，粒状体内で散逸されるエネルギーが最小になることを意味しており，自然界における普遍的な力学原理と深く関連しているものと考えられる．本論文は，非平衡熱力学を基礎として，変分不等式を定式化し，この一応用として，Roweのエネルギー比最小の原理を導びき，他の力学力理との関係について考察したものである．

2）非平衡熱力学の基本法則

デカルト座標系におけるオイラー表示を用い，ρを密度，v_iを速度，eを単位質量当たりの内部エネルギー，f_iを物体力，t_iを表面力，q_iを熱流束，rを単位質当たりの内部熱源からの発熱量，n_iを単位法線ベクトルとすれば，熱力学才1法則は

$$\dot{K}+\dot{E}=W+Q \tag{2.1}$$

ここに

$$K=\frac{1}{2}\int_V \rho v_i v_i\,dv \tag{2.2}$$

$$E=\int_V \rho e\,dv \tag{2.3}$$

$$W=\int_V f_i v_i\,dv+\int_{\partial V} t_i v_i\,dv \tag{2.4}$$

$$Q=\int_{\partial V} q_i n_i\,dS+\int_V \rho r\,dv \tag{2.5}$$

で，$(\dot{\cdot})$は物質導関数$\frac{D}{Dt}$を表し，繰り返し現われる指標については和をを取るものとする．式(2.2)-(2.5)を式(2.1)に代入し，連続の方程式

$$\dot{\rho}+\rho v_{i,i}=0 \tag{2.6}$$

及び運動方程式

$$\sigma_{ij,j}+\hat{f}_i=\rho\dot{v}_i \tag{2.7}$$

を用いれば，式(2.1)は

$$\rho\dot{e}=\sigma_{ij}d_{ij}+q_{i,i}+\rho r \tag{2.8}$$

$$\text{ただし}\quad d_{ij}=(v_{i,j}+v_{j,i})/2 \tag{2.9}$$

と書き換えられる．比エントロピー生成率${}_i\dot{S}$とエントロピー流${}_e\dot{S}$の和である全エントロピー変化率を$\dot{S}$とすれば，熱力学才2法則は，θを絶体温度として

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho_i S\,dv=\frac{D}{Dt}\int_V \rho S\,dv-\left(\int_{\partial V}\frac{q_i n_i}{\theta}dS+\int_V \rho\frac{r}{\theta}dv\right)\geq 0 \tag{2.10}$$

と記され，式(2.6)を用いれば

$${}_i\dot{S}=\dot{S}-{}_e\dot{S}\geq 0 \tag{2.11}$$

$$\text{ただし}\quad \rho_e\dot{S}=(q_i/\theta)_{,i}+\rho(r/\theta) \tag{2.12}$$

と書き換えられる．式(2.8)，(2.11)，(2.12)より，次のClausius-Duhemの不等式が求められる

$$\rho(\dot{S}-\dot{e}/\theta)+\sigma_{ij}d_{ij}/\theta+q_i\theta_{,i}/\theta^2\geqq 0 \tag{2.13}$$

3）非平衡熱力学を基礎とする変分不等式[13]

連続の方程式，運動方程式，速度－変形速度テンソルの関係は，それぞれ

$$\dot{\rho}+\rho v_{i,i}=0 \tag{3.1}$$

$$\sigma_{ij,j}+\hat{f}_i=\rho\dot{v}_i \tag{3.2}$$

$$d_{ij}=(v_{i,j}+v_{j,i})/2 \tag{3.3}$$

境界条件は

$$\sigma_{ij}n_j=\hat{t}_i\qquad \partial v_\sigma\ \text{上} \tag{3.4}$$

$$v_i=\hat{v}_i\qquad \partial v_v\ \text{上} \tag{3.5}$$

$$\text{または}\quad x_i=\hat{x}_i\qquad \partial v_x\ \text{上} \tag{3.6}$$

式(2.9)及び(2.10)を用いれば，不等式(2.13)は

$$\rho(\dot{S}-\dot{e}/\theta)+\sigma_{ij}d_{ij}/\theta-q_i(\theta^{-1})_{,i}$$
$$=(-\rho\dot{e}+\sigma_{ij}d_{ij}+q_{i,i}+\rho r)/\theta+\rho_i\dot{S}\geq 0 \tag{3.7}$$

更に上式は，次のように書き換えることができる．

$$\theta\rho_i\dot{S}\geq\rho\dot{e}-(\sigma_{ij}d_{ij}+q_{i,i}+\rho r) \tag{3.8}$$

今，何らかの摂動が物体に加えられた場合においてもエントロピー生成率${}_i\dot{S}$は常に正でなければならないことを要請（${}_i\dot{S}$が負になる可能性を全て否定）すれば次の変分不等式

$$\rho\dot{e} \geq \sigma_{ij} d_{ij} + q_{i,i} + \rho r \qquad (3.9)$$

が導びかれる．上式は，熱力学才1法則を満足していないが，才2法則(2.11)には反していない．この変分不等式は，自然界における安定な現象が，任意の摂動を受けた場合に満足しなければならない条件を表わしていると考えられる．式(3.9)の全ての力学量に摂動がない場合には，熱力学才1法則により，当然恒等的に等号が成立しなければならない． 物体内部に熱源がない断熱過程で，更に微小変形理論が適用可能な場合には，歪テンソルを ε_{ij} とすれば，変分不等式(3.9)は

$$\rho\dot{e} \geq \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad (3.10)$$

と書き換えられる．

4) Rowe のエネルギー比最小の原理の誘導

Roweは，砂を剛体球の集合体にモデル化して考察し，粒子間の力の釣合条件と変位の適合条件から，3軸(軸対称)応力状態に対して，次の関係式を導びいた．

$$\frac{\sigma_1\dot{\varepsilon}_1}{2\sigma_3\dot{\varepsilon}_3} = \frac{\tan(\phi_\mu+\beta)}{\tan\beta} \qquad (4.1)$$

ここに，σ_1, σ_3 は主応力(圧縮応力を正)，ε_1, ε_2 は主歪(ε_1は圧縮歪を正，ε_2は伸び歪を正)，ϕ_μは物理的内部摩擦角，βは内部粒子の辷り面がσ_1方向と成す角度である．

Rowe はσ_1, σ_2, $\dot{\varepsilon}_1$, $\dot{\varepsilon}_3$が全て実際の測定値(摂動を含まぬ真の値)を表す場合，式(4.1)の左辺の値は，右辺の最小値に対応しなければならないと主張した．

$$\tan(\phi_\mu+\beta)/\tan\beta = K \qquad (4.2)$$

とおいて，供試体に外部から成された仕事量をW_i，供試体が外部に対して成す仕事量をW_o，供試体内部で散逸されるエネルギーをDとすれば，これらの値は，式(4.1)を用いて，それぞれ

$$\dot{W}_i = \sigma_1\dot{\varepsilon}_1 \ [>0] \qquad (4.3)$$

$$\dot{W}_o = 2\sigma_3\dot{\varepsilon}_3 \left[= \sigma_1\dot{\varepsilon}_1/K > 0\right] \qquad (4.4)$$

$$\dot{D} = (1-1/K)\,\sigma_1\dot{\varepsilon}_1 \left[= \sigma_1\dot{\varepsilon}_1 - 2\sigma_3\dot{\varepsilon}_3 > 0\right] \qquad (4.5)$$

と表わされる．この場合の熱力学才1法則(エネルギー保存則)は

$$\dot{D} = \dot{W}_i - \dot{W}_o \qquad (4.6)$$

と記される．上式中の力学量に摂動が含まれる場合には，変分不等式(3.10)に従って，式(4.6)は

$$\dot{D} \geq \dot{W}_i - \dot{W}_o \qquad (4.7)$$

と書き改められる．式(4.3)-(4.5)を上式に代入し，主応力及び主歪速度が，それぞれ摂動を含まぬ真の値(測定値) σ_1^*, σ_2^*, $\dot{\varepsilon}_1^*$, $\dot{\varepsilon}_3^*$ を表すものとすれば

$$\frac{\sigma_1^*\dot{\varepsilon}_1^*}{2\sigma_3^*\dot{\varepsilon}_3^*} \leqq K \qquad (4.8)$$

同様に，$\dot{W}_i$, $\dot{W}_o$, $\dot{D}$ 中の全ての力学量が真の値と一致するものとすれば，式(4.6)より

$$\frac{\sigma_1^*\dot{\varepsilon}_1^*}{2\sigma_3^*\dot{\varepsilon}_3^*} = K^* \qquad (4.9)$$

式(4.8)と(4.9)より

$$K \geq K^* \qquad (4.10)$$

この不等式は，Kが最小になる場合に，βは摂動を含まない真の値(実際の値)になることを表現している．

5) Roweのエネルギー比最小の原理と他の力学原理の関係

Roweのエネルギー比最小の原理と他の力学原理が変分不等式(3.9)または(3.10)を通じて関連していることを示すために，一例として，ポテンシャル・エネルギー最小の原理を誘導する．この場合には，内部エネルギーeは，歪エネルギーに対応する．摂動を含まない真の内部エネルギー，応力テンソル，歪テンソルをe^*, σ_{ij}^*, ε_{ij}^*と表わせば，式(3.10)より

$$\dot{e} - \sigma_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij} \geq \dot{e}^* - \sigma_{ij}^*\dot{\varepsilon}_{ij}^* \ (=0) \qquad (5.1)$$

物体Vの内部では，物体力 $\hat{f}_i$，Vの表面∂V_σでは表面力$\hat{t}_i$，また∂V_u上では固定された変位が与えられているものとすれば，σ_{ij}^*は平衡方程式を，またε_{ij}^*, ε_{ij}は適合条件を満足するものと考えられるので，式(5.1)を体積々分し，Green の定理を用いれば

$$\int_V \dot{e}\,dv - \int_V \hat{f}_i\dot{u}_i\,dv - \int_{\partial V_\sigma} \hat{t}_i\dot{u}_i\,ds \geq \int_V \dot{e}^*dv - \int_V \hat{f}_i\dot{u}_i^*dv - \int_{\partial V_\sigma} \hat{t}_i\dot{u}_i^*ds \qquad (5.2)$$

$\hat{f}_i$, $\hat{t}_i$は時間によって変化せず，またu_iは時間$t=0$を基準にして測定するものとして，上式を時間々隔$[0,t]$で積分すれば

$$\int_V e\,dv - \int_V \hat{f}_i u_i\,dv - \int_{\partial V_\sigma} \hat{t}_i u_i\,ds \geq \int_V e^*dv - \int_V \hat{f}_i u_i^*dv - \int_{\partial V_\sigma} \hat{t}_i u_i^*ds \qquad (5.3)$$

となり，上式は良く知らたポテンシャル・エネルギー最小の原理を表わしている．これ以外にも，変分不等式(3.9)からは，Glansdorff & Prigogine の安定条件など種々の変分原理や安定条件の誘導が可能である．[13,14]

参考文献

(1) Rowe, P.W., Proc. Roy. Soc. A269, p.500, 1962 (2) Rowe, P.W., ASCE, Vol.89, SM3, P.37, 1963 (3) Gibson, R.E. & Morgenstern, N., ASCE, Vol.89, SM6, P.127, 1963 (4) Trollope, D.H. & Parkin, A.K., 同上 p.129 (5) Roscoe, K.H. & Schofield, A.N., Vol.90. SM1, p.136 1964 (6) Scott, R.F., 同上, p.133 (7) Horne, M.R., Proc. Roy. Soc. A286, p.62, 1965 (8) Meyerhof, G.G., ASCE, Vol.90. SM1, p.135, 1964 (9) Mogami, T., Special lecture, 1st. Iranian Congress of Civil Engineering Mechanics, 1972, (10) Procter, D.C., Géotechnique, Vol.24. No.3, p.269 (11) Tokue, T., Soils & Foundations, Vol.18, No.1, p.1 1978 (12) De Josselin De Jong, G., Géotechnique, Vol.26. No.3 p.527, 1976
(13) 新関茂，佐武正雄，土木学会年次学術講演概要集 I, p.1, 1980
(14) 新関茂，財団法人建設工学振興会年報，15, 1981