

運輸省オニ港湾建設局 正会員 矢島 道夫

1 はじめに

波浪観測記録の蓄積がなされ、一方で電算を使った波浪推算が可能となり、これらのデータを使って確率投高を求め、これを参考・設計構造物の設計投高として用いる例が多くなっている。しかし、30年、50年といった長い再現期間の確率投高を推定するためには、まだ観測期間が短く、かつ推定値の精度も不明のままである。本論は、年最大投高 W は、年間 N 回発生する気象じょうぬ時の最大投高 Z の年最大値であることを利用し、観測記録からその確率分布型を求め、この結果から W の確率分布型を推定し、再現期間 t 年の確率投高を推定する方法を提案するものである。

2 年最大投高 W と年間 N 回発生する気象じょうぬ時の最大投高 Z の関係

確率変数 X が累積分布関数 $F_X(x)$ を有すると、 N 個の X のなかの最大値 Y 、すなわち $Y = \max[X_1, X_2, \dots, X_N]$ の $F_Y(y)$ は、 X_i と X_j が独立の場合、(1)式で与えられる。

$$F_Y(y) = \{F_X(y)\}^N \quad \text{----- (1)}$$

次に示すタイプIの極値分布(Gumbel分布)は、 X が $F_X(x) = 1 - e^{-g(x)}$ の分布型を持ち、 N が大きくなると、一般式(1)の近似式として求められたものである。

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \exp[-e^{\alpha(w-u)}] \quad -\infty \leq w \leq \infty \\ f_W(w) &= \alpha \exp[-\alpha(w-u) - e^{\alpha(w-u)}] \end{aligned} \quad \text{----- (2)}$$

$$= \text{すなわち} \text{平均 } m_w = u + \frac{0.577}{\alpha}, \text{ 分散 } \sigma_w^2 = \left(\frac{\pi}{6\alpha}\right)^2$$

そして、 $g(x) = \lambda(x-H_0)$ 、すなわち X が指数分布を有すると、確率変数 W の分布型のパラメータ α と u は、

(3)で与えられる。

$$\alpha = \lambda, \quad u = H_0 + \frac{\ln(N)}{\lambda} \quad \text{----- (3)}$$

年最大投高 W の分布型は未定であるが、(2)式に示すGumbel分布を仮定すると仮定する。そうすると、年間 N 回生じる気象じょうぬ時の最大投高 Z (投高 H_0 以上)は、次の分布型を持つことが導かれる。

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= 1 - e^{-\lambda(z-H_0)} \quad z \geq H_0 \\ f_Z(z) &= \lambda e^{-\lambda(z-H_0)} \end{aligned} \quad \text{----- (4)}$$

$$= \text{すなわち} \lambda = \alpha, H_0 = u - \frac{\ln(N)}{\alpha}$$

気象じょうぬ時の最大投高として、(4)の分布型を持つ確率変数の実現値を、波浪観測の結果として入手することとなる。年平均回数 N は、実際には年によって異なる確率変数であるが、以下これを単純化し、 N を定数として扱う。

3 この観測値による年最大投高 W の分布型の推定
本論は提案する確率投高の推定は、(4)式の分布型を持つ確率変数 Z の n 個の年間の実現値を用いて、次の手順で行う。

a) 第一に、 n 年間、年平均 n 回の気象じょうぬ時の最大投高(H_0 以上)の観測値を用いて、(4)式で示された Z の分布型を推定する。

b) 次に、(3)式を使って、(4)式から年最大投高 W の分布型(2)式を推定する。

c) (2)式の分布型から、 t 年の再現期間を有する確率投高 w_t を求める。

$n \times n$ 個の Z の観測値の平均値 $M = \frac{1}{n} \sum Z_i$ ($i=1 \sim n$)は、平均 $m_M = m_Z$ 、分散 $\sigma_M^2 = \frac{1}{n} \sigma_Z^2$ の確率変数である。(4)式のパラメータは、 $M - X > 0$ 表に於て、 $M = H_0 + \frac{1}{\alpha}$ より、 λ の推定値 $\lambda = \frac{1}{M - H_0}$ となる。次に、(3)式を用いて、(2)式のGumbel分布のパラメータは、 $\alpha' = \lambda$ 、 $u' = H_0 + \frac{\ln(n)}{\lambda}$ と推定される。

以上の結果、年最大投高 W の累積分布関数は、

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \exp[-\exp\{-\lambda'(w-H_0) + \ln(n)\}] \\ &= \exp[-\exp\{-\frac{1}{M-H_0}(w-H_0) + \ln(n)\}]\end{aligned} \quad \text{----- (5)}$$

となる。上式を用いて、再現期間 t 年の確率投高 w_t は、 $F_W(w_t) = \frac{t-1}{t}$ を w_t について解き、次式で与えられる。

$$w_t = (M-H_0)[\ln(n) - \ln\{-\ln(\frac{t-1}{t})\}] + H_0 \quad \text{----- (6)}$$

$m_M = m_Z = \frac{1}{\lambda} + H_0$ であるから、 w_t の期待値は、

$$\begin{aligned} E(w_t) &= \{E(M) - H_0\}[\ln(n) - \ln\{-\ln(\frac{t-1}{t})\}] + H_0 \\ &= u - \frac{1}{\alpha} \ln\{-\ln(\frac{t-1}{t})\} \\ &= w_t \end{aligned} \quad \text{----- (7)}$$

となる。また、 w_t の分散は、次式となる。

$$\begin{aligned} \text{Var}(w_t) &= [\ln(n) - \ln\{-\ln(\frac{t-1}{t})\}]^2 \sigma_M^2 \\ &= \frac{1}{n} [\ln(n) - \ln\{-\ln(\frac{t-1}{t})\}]^2 \sigma_Z^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n\sigma^2} [\ln(w) - \ln\left\{1 - \ln\left(\frac{z-1}{z}\right)\right\}]^2 \left(\frac{1}{z}\right)^2$$

$$= \frac{1}{n\sigma^2} [\ln(w) - \ln\left\{1 - \ln\left(\frac{z-1}{z}\right)\right\}]^2 \left(\frac{\sqrt{z}}{z}\right)^2 \sigma^2 \quad (8)$$

実際には、 σ^2 や λ の真値は未知数であるが、 λ の推定値 λ' を用いて、 $\text{Var}(w')$ の概略値が得られる。この式から明らかになるように、 $\text{Var}(w')$ の値が大きいかほど w' の分散は小さくなるので、 z が指数分布を有するという前提が成り立つ範囲内で H_0 が小さくとり、毎年の気象じょうぬの数 n を大きくすれば、 w' の推定精度が向上する。同様に、 σ が小さいほど、 w' の分散は小さくなる。また、中心極限定理から H_0 は正規分布に近似するので、(6)式に示されるように、 w' もまた正規分布に近似する。

以上のように、本稿で提案した方法によって、期待値が真値に等しく、(6)式の分散を持つ正規分布として、再現期 H の年々の確率超過を推定することが出来る。

4. 観測データによる検証

図-1は、朝川の11年間の投資観測データから、 z の頻度分布をつくり、観測値の平均値 $= 1/\lambda$ として求めた z の指数分布と比較したものである。データ数は、 $H_0 \geq 2.5\text{m}$ の場合 120個、 $H_0 \geq 3.0\text{m}$ は59個である。この比較から、年平均回生する気象じょうぬ時の最大投資 z ($\geq H_0$) が、指数分布を有するという前提が妥当であると判断できる。

図-2は、 z の分布型を図-1に示した $f_z(z) = 1.41 \times e^{-1.41(z-2.5)}$ ($z \geq 2.5\text{m}$)、 $n = 120$ 個とした場合について、年最大投資 w の分布型を(1)式一般式と、(2)の近似式である(3)のGumbel分布によって求め、両者を比較したものである。すなわち、一般式による分布型は(9)式で、Gumbel分布は(10)式で与えられる。

$$\begin{aligned} F_w(w) &= \{F_z(w)\}^n = \{1 - e^{-1.41(w-2.5)}\}^{120} \\ f_w(w) &= \frac{d}{dw} F_w(w) = n \{F_z(w)\}^{n-1} \times f_z(w) \quad w \geq 2.5\text{m} \\ &= 120 \times \{1 - e^{-1.41(w-2.5)}\}^{119} \times 1.41 e^{-1.41(w-2.5)} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_w(w) &= \exp[-e^{-1.41(w-4.2)}] \quad -\infty \leq w < \infty \\ f_w(w) &= 1.41 \exp[-1.41(w-4.2) - e^{-1.41(w-4.2)}] \quad (10) \end{aligned}$$

2つの分布型は、特に確率超過を求めるほう $w \geq 5.5\text{m}$ ($F_w(5.5) \approx 0.85$) の範囲でよく一致しており、Gumbel分布による近似が非常によいことを示している。

次に図-3は、 $n = 11$ 、 $n = 5$ 年、 $H_0 \geq 2.5\text{m}$ の場合について、モンテカルロ法によって、 $f_z(z) = 1.41 e^{-1.41(z-2.5)}$ の分布型から、 z の観測値のサンプル5年毎分を100ケースつくり、これらの100ケースから求められる再現期間50年の確率超過の頻度分布と、(10)式から求められる正規分布型とを

比較したものである。

5 今後の課題

w が Gumbel 分布し、 z が指数分布を有することを前提とすれば、図-3を作成したのと同じ方法によって、従来用いられている極値時系列法と本稿で提案した方法とを比較することが可能である。今後、両者の精度の比較を行うとともに、両者の適用範囲について、検討しようと考えている。

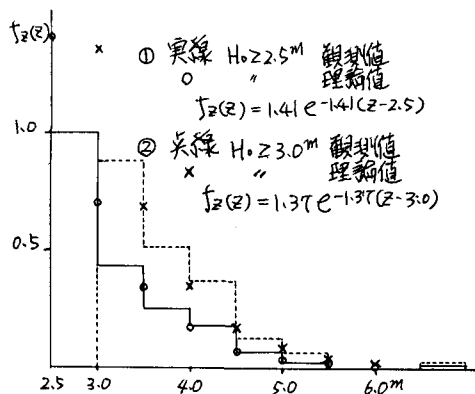


図-1 z の分布型 (気象じょうぬ時最大投資)

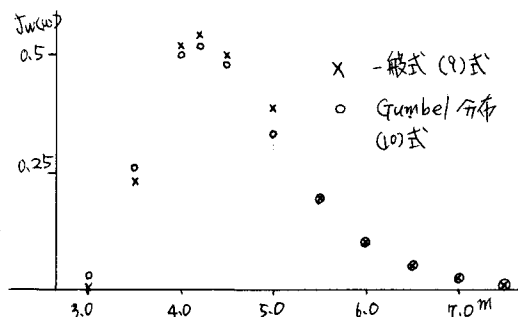


図-2 w の分布型 (年最大投資)

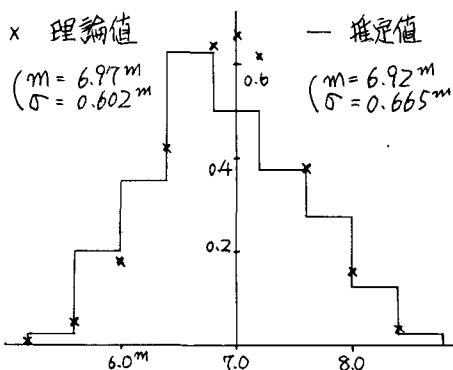


図-3 50年確率超過の推定値 (w_{50}) の分布