II-352　貯留型流出モデルの確率応答

北海道大学工学部　正員　○藤田　睦博
同　　上　　　　道口　敏幸
北電興業(株)　　　　羽山　芳則

1．はじめに　観測値は、必ず誤差をともなう。本研究は貯留型の流出モデルを用いて、降雨量の誤差を補償するために降雨量に撹乱項を導入し、この撹乱項が流出量におよぼす影響について検討しようとするものである。降雨量は、流出モデルを記述している基礎微分方程式の強制項に相当し、基礎式が非線形である場合、この確率微分方程式の解を得ることは、必ずしも容易でない。ここでは、平均値関数、分散関数の簡易推定法について述べる。[1)]

2．基礎式　貯留型の流出モデルに限らず、集中定数系のモデルは空間軸に関するパラメータを含んでおらず、モデルに含まれる係数を物理的に評価しようとすると困難な場合がある。したがってここでは、最初に力学的モデルで、かつ、分布定数系の流出モデルである kinematic wave モデルを用いて貯留型のモデルを誘導し、モデルのパラメータの評価を容易にした。(3)，(4)式を用いて(1)式を無次元化すると(5)式を得る。(大文字は小文字の量の無次元量を示す)(5)式を(6)式または(7)式のような貯留型のモデルに置換できる。[2)]

Rを互いに独立な白色雑音とし、その統計量を(8)式に示す。Brasら[3)]らは、ベキ乗型の確率変数S^mを(9)式のように近似し、(9)式の両辺の自乗平均誤差を最小にするα, βを(10)，(11)式のように与えている。一印は平均値を示し、～印は平均値からの偏差を示す。(7)，(9)式より$\overline{S}$, $\tilde{S}$に関して(13)，(14)式を誘導できる。βを時間の関数として(14)式より$\tilde{S}$を求めると(15)式のようになり、σ_S^2は(17)の微分方程式を満足している。$\overline{S}$, σ_S^2は、(13)，(17)式を連立させて解くことにより求まる。また、流量の平均$\overline{Q}$，分散σ_Q^2は(6)の第2式、および、(9)式を用いると(18)式で与えられる。

図-1～4は、(10)，(11)式の{　}内を1項で打ち切って(13)，(17)，(18)式より求めた流量、貯留量の平均値および分散を示したものである。(最も簡単な場合)また、図-5～8は、(7)式のRに直接(8)式で与えられる正規乱数を与え、$m \neq 1$の場合Sを数値計算により求め、このような計算を500回繰返し、各時刻ごとのアンサンブル平均として、それぞれ流量、貯留量の平均、分散を求めた結果を示したものである。(図中の十印)　また、図

$$\partial y/\partial t + \partial q/\partial x = r \qquad q = ay^m \tag{1}$$

$$y(x,0) = 0 \qquad y(0,t) = 0 \tag{2}$$

y: 水深　q: 単位幅流量　r: 有効雨量　a, m: 定数

$$r = r_* R \quad x = x_* X \quad y = y_* Y \quad q = q_* Q \quad t = t_* T \tag{3}$$

$r_* = \overline{r}$ (平均雨量)　$x_* = l$ (斜面長)

$$y_* = t_* \overline{r} \quad q_* = l\,\overline{r} \quad t_* = (l\overline{r}^{1-m}/a)^{1/m} \tag{4}$$

$$\partial Y/\partial T + \partial Y^m/\partial X = R \qquad (0 \leq X \leq 1) \tag{5}$$

$$dS/dT = R - Q \qquad S = KQ^{1/m} \qquad K = m/(m+1) \tag{6}$$

$$dS/dT = R - (1/K)^m S^m \tag{7}$$

$$E\{R\} = \overline{R} = 1 \qquad Var\{R\} = E\{\tilde{R}^2\} = \sigma_L^2 \tag{8}$$

$$S^m = (\overline{S} + \tilde{S})^m \fallingdotseq \alpha\overline{S} + \beta\tilde{S} \tag{9}$$

$$\alpha = \overline{S}^{m-1}\{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{2k-1}(m-i) \prod_{j=1}^{k}(2j-1)}{(2k)!} \cdot V^{2k}\} \tag{10}$$

$$\beta = \overline{S}^{m-1}\{\sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{2k-2}(m-i) \prod_{j=1}^{k}(2j-1)}{(2k-1)!} \cdot V^{2k-2}\} \tag{11}$$

$$V = \sigma_S/\overline{S} \tag{12}$$

$$d\overline{S}/dT = \overline{R} - (1/K)^m \alpha\overline{S} \tag{13}$$

$$d\tilde{S}/dT = \tilde{R} - (1/K)^m \beta\tilde{S} \tag{14}$$

$$\tilde{S} = exp\{-\int_0^T (1/K)^m \beta d\tau_1\} \cdot \int_0^T exp\{\int_0^{T_1} (1/K)^m \beta d\tau_3\} \tilde{R}_T d\tau_2 \tag{15}$$

$$E\{\tilde{S}^2\} = \sigma_S^2 = exp\{-2\int_0^T (1/K)^m \beta d\tau_1\} \cdot \int_0^T exp\{2\int_0^{T_1} (1/K)^m \beta d\tau_3\}\, \sigma_R^2 d\tau_2 \tag{16}$$

$$d\sigma_S^2/dT + 2(1/K)^m \beta\sigma_S^2 = \sigma_R^2 \tag{17}$$

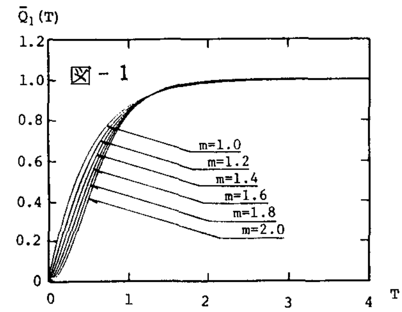
$$\overline{Q} = E\{(1/K)^m S^m\} = (1/K)^m \alpha\overline{S}$$
$$\sigma_Q^2 = E\{(1/K)^{2m} S^{2m}\} - \overline{Q}^2 = (1/K)^{2m} \beta^2 \sigma_S^2 \tag{18}$$

$$E\{r\} = \overline{R} \quad \sigma_r^2 = \overline{r}^2 \sigma_R^2 \quad E\{s\} = (l^{m+1}\overline{r}/a)^{1/m} m/(m+1)$$
$$\sigma_s^2 = (l^{m+1}\overline{r}/a)^{2/m}/(2(m+1))\sigma_r^2 \quad E\{q\} = l\overline{r} \quad \sigma_q^2 = \frac{m+1}{2} l^2 \sigma_r^2 \tag{19}$$

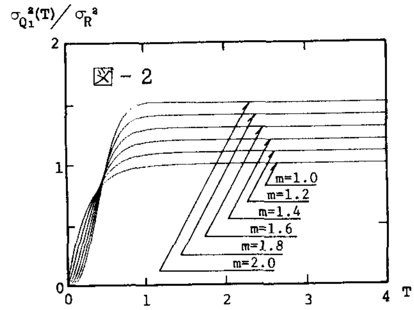
の実線は、それぞれ図－1～4の $m=2$ の計算値に対応している。ここでは、α,β の最も簡単な場合について示したが、(13),(17)はシュミレーションよる結果とよく一致している。なお、ここで用いた σ_R の範囲は、0.1～0.2（σ_Rは $r(t)$ の変動係数に等しい。(19)の第1式参照)である。σ_R が、さらに大きくなると(10),(11)式の{　}内の1項だけを採用するのは、不十分である。また、Brasの近似式が成立するためには、(12)式のVが0.4以下の場合(Vは、S の変動係数に等しい)であり、α, β の採用項数を多くしても意味がない。ここで示した式および図は全て無次元量に関するものであり、(19)式に定常状態における有次元の貯留量,流量の平均,分散を示す。なお、貯留量は単位幅貯留量(m^3／m)の次元になっおり、流量は単位幅流の次元をもっている。

図－2,4に示すように、モデルのパラメータ m の値が増加するにともない、流量の分散は増加し、貯留量の分散にピークが認められるようになる。

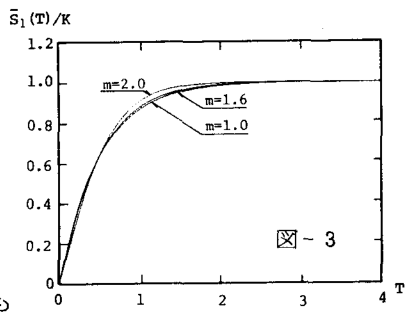
図の無次元時間 T は(4)の第4式に示すように、到達時間 T_* によって無次化されたもので、図－4,8は貯留量の分散の最大値が、ほぼ到達時間の2分1の時刻に生起することを示している。(5)式の R に直接(8)式の統計量をもつ正規乱数を与えてシュミレーション法により求めた水深 Y の分散は $T=1$（到達時間）のとき最大値をとり[4]、貯留量の分散が $T=0.5$ で最大値をとることと関係しているものと思われる。



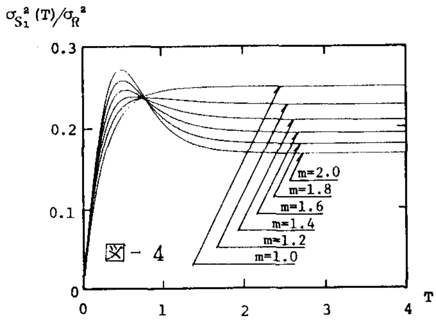
図－1



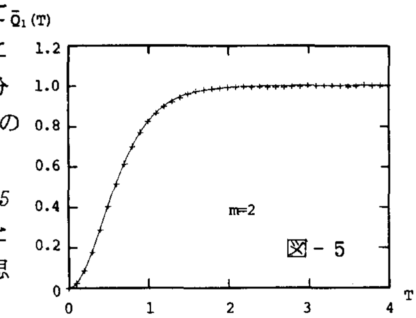
図－2



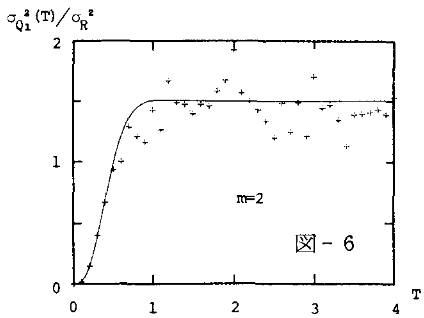
図－3



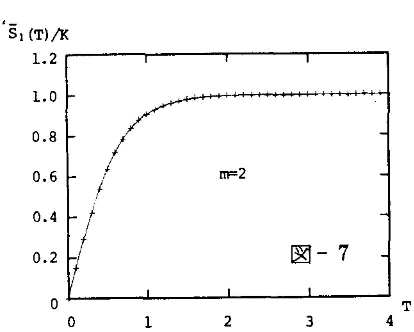
図－4



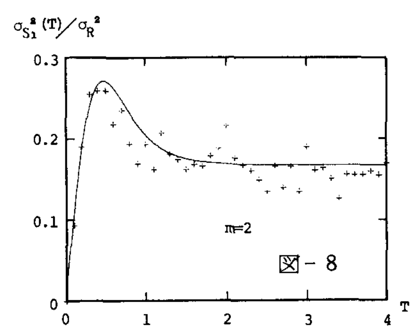
図－5



図－6



図－7



図－8

参考文献

1) 藤田,山岡,羽山：貯留関数法における確率応答に関する研究,土木学会北海道支部,第37号,1981
2) 藤田：斜面長の変動を考慮した貯留関数法,土木学会論文報告集投稿中
3) Bras,R.L.,Georgakakos,K.P.: Real time nonlinear filtering techniques in streamflow fore-casting,3rd In.Sym.on Stochastic Hydraulics,Tokyo,1980
4) Fujita,M.,Michiguchi,T.& Yamaoka,I.: Stochastic response in a nonlinear runoff system,同上

本研究は文部省科学研究費補助金(一般研究C)を受けたものである。記して謝意を表す。