II-314　面積平均雨量の精度

東京都立大学工学部　正会員　新井邦夫
〃　〃　丸井信雄

1．はじめに ――― 面積平均雨量の精度は、今日まで多数の研究者によって追求されてきた。[1] しかしながら、我々の乏少な概査によれば、観測値より得られる標本統計量を、情報として理論的に正しく利用している研究は極めて少ない。最も重要な点は、真の面積平均と共に真の面積分散（降雨の地域的ばらつき）も未知であるのに、多くは後者を既知とおき、それに標本分散を充当していることである。

本報告は、この理論的欠陥を修正し、より発展させた成果である。

2．理論 ――― ある領域内で、一つの降雨事象を多数の地点で同時に計量した時、観測値を標本とする母集団は、ある確率分布に従う。今、この分布を対数正規分布と仮定する。これは、出現値を割合無理なく表現できると予想されることの他、解析解が得やすいことを理由としている。

さて、i地点の降水量をR_iとした時、$x_i=\ln R_i$は平均をm_x、分散をσ_x^2とする正規分布

$$f_X(x)=\{1/\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_x\}\cdot\exp\left[-(x_i-m_x)^2/2\sigma_x^2\right] \quad \cdots\cdots(1)$$

に従う。降水量の真の面積平均(m_R)や真の面積分散(σ_R^2)と、(1)式の平均、分散との間には次の関係がある。[2]

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x^2&=\ln(\sigma_R^2/m_R^2+1)=\ln(V_R^2+1)\\ m_x&=\ln m_R-\sigma_x^2/2\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2)$$

ただしV_Rは変動係数である。この関係は、観測値から得られる標本統計量（$\bar{R}$, S_R, V_R', $\bar{X}$, S_X）の間にも当然成立する。

問題は、m_Rを推定することにあるが、σ_x^2も既知ではないから、まず任意のn地点の観測雨量R_iを対数変換したx_iによって、(1)式を母分布とする2次元尤度関数

$$L(m_x,\sigma_x|x_1,x_2\cdots x_n)=\{1/\sigma_x^n\}\exp\left[-1/2\sigma_x^2\sum(x_i-m_x)^2\right] \quad \cdots\cdots(3)$$

を考える。(3)式は、標本平均$\bar{X}=\sum x_i/n$、および不偏標本分散$S_X^2=\{\sum(x_i-\bar{X})^2\}/(n-1)$を使って次のように変形できる。

$$L=\{1/\sigma_x^n\}\exp\left[-(1/2\cdot\sigma_x^2)\{n(m_x-\bar{X})^2+(n-1)S_X^2\}\right]$$

$$=\left\{\frac{1}{\sigma_x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{m_x-\bar{X}}{\sigma_x/\sqrt{n}}\right)^2\right]\right\}\cdot\left\{\frac{1}{\sigma_x^{n-1}}\exp\left[-\frac{(n-1)S_X^2}{2\sigma_x^2}\right]\right\} \quad \cdots\cdots(3)'$$

(3)式から、m_x, σ_xを確率変数とする2次元分布の密度関数は、直観的に、正規分布と、ガンマ分布との積であることが推定される。確率分布としての要件を満たすように係数を定めると、

$$f_{M\Sigma}(m_x,\sigma_x)=\left[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{n(m_x-\bar{X})^2}{\sigma_x}\right)\right\}\right]$$

$$\times\left[\frac{2\cdot S_X^{n-2}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdot\sigma_x^{-n+1}\cdot\exp\left\{-\frac{(n-1)S_X^2}{2\sigma_x^2}\right\}\right] \quad \cdots\cdots(4)$$

$$-\infty\leqq m_x\leqq\infty,\quad 0\leqq\sigma_x$$

を得る。

(4)式の周辺分布は、それぞれ次のように求められる。

$$f_M(m_x)=\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{S_X\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left\{1+\frac{n}{n-1}\left(\frac{m_x-\bar{X}}{S_X}\right)^2\right\}^{-\frac{n-1}{2}} \quad \cdots\cdots(5)$$

$$f_\Sigma(\sigma_x)=\frac{2\cdot S_X^{n-2}\cdot\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\sigma_x^{-n+1}\cdot\exp\left\{-\frac{(n-1)S_X^2}{2\sigma_x^2}\right\} \quad \cdots\cdots(6)$$

さらに、m_xおよびσ_x^2の期待値および分散は、

$$E[m_x]=\bar{X} \quad \cdots(7) \qquad Var[m_x]=S_X^2\frac{n-1}{n(n-4)} \quad \cdots(8)$$

$$E[\sigma_x^2]=S_X^2\frac{n-1}{n-4} \quad \cdots(9) \qquad Var[\sigma_x^2]=S_X^4\frac{2(n-1)^2}{(n-6)(n-4)^2} \quad \cdots(10)$$

と求まる。これらの式と、(2)式の関係を使いm_Rの期待値および変動係数を観測雨量の　平均$\bar{R}$と、変動係数$V_R'=S_R/\bar{R}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(R_i-\bar{R})^2/(n-1)}\cdot\bar{R}$とによって次のように表わすことができる。

$$E[m_R]=\exp\{E[m_x]+(1/2)E[\sigma_x^2]\}$$

$$=\exp\left[\ln\bar{R}-\frac{\ln(V_R'^2+1)}{2}+\frac{n-1}{2(n-4)}\ln(V_R'^2+1)\right]$$

$$=\bar{R}\cdot(V_R'^2+1)^{\frac{3}{2(n-4)}}=F\cdot\bar{R} \quad \cdots\cdots(11)$$

$$V_{m_R}=\left(\frac{Var[m_R]}{E^2[m_R]}\right)^{\frac{1}{2}}\fallingdotseq\left\{\frac{E^2[m_R](Var[m_x]+Var[\sigma_x^2]/4)}{E^2[m_R]}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\frac{n-1}{n(n-4)}\ln(V_R'^2+1)+\frac{(n-1)^2}{2(n-6)(n-4)^2}\{\ln(V_R'^2+1)\}^2\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots(12)$$

(11)式右辺係数および(12)式の関係を図－1，図－2に示した。図－1は標本平均そのものを真平均の期待値とし

てはならない場合があることを示している。図－2は、本論の結論であって、真面積平均雨量の変動係数V_{MR}と観測点数および標本変動係数V_R'との関係が示されている。図左下部の直線性は、(12)式の近似化の可能性を暗示するが、安易な近似は危険である。なぜなら、実際には、観測点の少ない場合が殆んで少なくはなく、又、標本変動係数が1に近い場合もあり、一般に図右上部を使用する頻度が高いと考えられるからである。

真の面積平均雨量の区間推定のために、ここではチェビシェフの不等式、

$$P\{E[M_R](1-t\cdot V_{MR}) \leqq M_R \leqq E[M_R](1+t\cdot V_{MR})\} \geqq 1-\frac{1}{t^2} \quad \cdots\cdots(13)$$

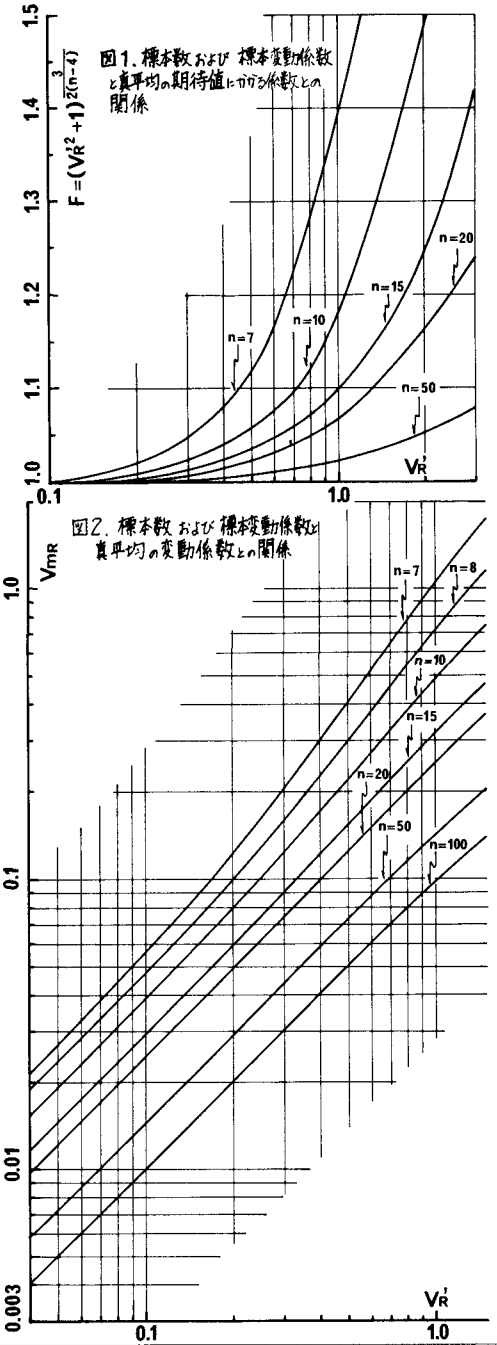
を示しておく。

3．実測値への適用 ――― 1958年9月17日、神流川の12地点において、214, 233, 229, 268, 197, 168, 201, 222, 221, 211, 192, 164なる日雨量が観測されたく単位はmm[3]。この資料を特に選んだ理由はなく、たまたま手近にあったにすぎない。これらの標本統計量は$\bar{R}=210$, $S_R=28.6$, $V_R'=0.136$と算出される。したがって、(11)式より、$E[M_R]=210\times1.003=210$, 又(12)式より、$V_{MR}=0.046$と算出されるので、真の面積平均雨量の分散は、$Var[M_R]=E[M_R]\cdot V_{MR}=93.3$と知ることができる。さらに(13)式を使えば、$P\{179 \leqq M_R \leqq 240\} \geqq 0.9$を得る。

上と同じ資料により、同日夜半からの時間雨量について、標本統計量およびそれより求められる真面積平均雨量の期待値、変動係数、さらに(13)式による90%区間の上下限値を表－1にまとめて示した。

納得のいく数値ではないかと愚考する。

4．結論 ――― 示した方法の最大の特徴は、観測値の分散を、情報として理論的に正しく利用したことにある。さらに、支配面積が互いにほぼ等しい降雨観測点が最小7点ありさえすれば、対象領域の大きさや、計測時間の単位に関係なく、面積平均雨量の精度を評価できることが判ったことも大きな収穫であろう。



文献等

1）標準等（土木技術資料 16-12 P631）は簡単にまとめている。

2）伊藤、倉田訳 土木事業のための確率統計の基礎 九善 P103～104

3）建設省 神流川流域水文観測資料 1962

表－1

時刻	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8
標本数 n	12	12	12	12	12	12	12	12	11	11
標本平均 $\bar{R}$	15.1	10.8	9.4	8.7	16.9	24.3	33.7	29.9	19.7	26.7
不偏標本分散 S_R	7.23	6.89	7.95	1.82	4.32	8.61	10.20	10.30	8.44	6.56
標本変動係数 V_R'	0.48	0.64	0.85	0.21	0.26	0.35	0.30	0.34	0.43	0.25
真平均の期待値 $E[M_R]$	15.7	11.6	10.4	8.8	17.1	24.8	34.4	30.5	20.5	27.0
真平均の変動係数 V_{MR}	0.17	0.24	0.36	0.07	0.09	0.12	0.10	0.12	0.17	0.09
90%上限値 $E[M_R](1+3.16V_{MR})$	24.1	20.4	22.2	10.7	21.9	34.2	45.4	42.1	31.6	34.6
90%下限値 $E[M_R](1-3.16V_{MR})$	7.2	2.8	0.	6.9	12.3	15.4	23.4	18.9	9.4	19.4