

II-311 長期流出のエントロピー・モデル — 状態遷移確率法

信州大学工学部 正員 奥川典昭
京都大学防災研究所 正員 地端周一
京都大学工学部 正員 高藤琢馬

1. 序論 われわれは長期流出現象が時間的・量的に不確定な運動機構であることに着目して、それに Shannon の情報理論の概念を適用してこたへた。本研究は、それら従来の研究を受け、流出系に「獲得情報量最大仮説」を置くことにより、流出機構の内部構造に思い立ち入って、流出状態間の遷移構造を確率的に表現しようとするものである。

2. 貯留状態の遷移 長期流出系の素遷移を単純マルコフ過程とみなし、時刻 t における有効降雨、流出量、流出系の内部状態（具体的に流域の貯留状態）を R_t, Q_t, S_t とすると、降雨・流出変換過程は (2.1) 式のように表記される。(2.1) 式の左の式は (2.2) 式の連続式から評価するところから、問題は (2.1) 式の右の式の状態移である。

$$Q_t = f(R_t, S_t), S_{t+1} = g(R_t, S_t) \quad \dots (2.1), \quad Q_t = S_t + R_t - S_{t+1} \quad \dots (2.2)$$

ここに、 $f(\cdot), g(\cdot)$; 任意函数。本研究では状態遷移を評価するために流出系に獲得情報量最大仮説を置く。

3. 獲得情報量の数量的表現 獲得情報量はサブシステムを x, y とすると、

$$I = H(x) + H(y) - H(x, y) = H(x) - H_y(x) = H(y) - H_x(y) \quad \dots (3.1)$$

と表記される。ここに、 $H(x), H(y)$ はエントロピー、 $H(x, y)$ は相互エントロピー、 $H_y(x), H_x(y)$ は条件つきエントロピーである。いま、系の定常化がはかられているとすると、その期間内の貯留状態の遷移に関する獲得情報量は次式で表現される。

$$I = -\sum_j P_j \cdot \ln P_j + \sum_{ij} P_i \cdot Q_{ij} \cdot P_{ij} \cdot \ln P_{ij} \quad \dots (3.2)$$

ここに、 Q_{ij} は $R_i = 1$ なる降雨確率、 P_{ik} は $S_t = i$ なる状態確率、 P_{ij} は $S_t = i, R_t = 1$ なる条件の下で $S_{t+1} = j$ なる遷移確率である。さて、流出系に獲得情報量最大仮説を置くことは当然であるから (3.2) 式を最大にする遷移確率を求めると、

$$P_{ij} = P_j \quad \dots (3.3)$$

となり、不合理な現象説明となるため、われわれは特性値を導入する。それを l_{ij} と表記すると単位特性値あたりの獲得情報量は

$$I' = \frac{-\sum_j P_j \cdot \ln P_j + \sum_{ij} P_i \cdot Q_{ij} \cdot P_{ij} \cdot \ln P_{ij}}{\sum_{ij} P_i \cdot Q_{ij} \cdot P_{ij} \cdot l_{ij}} \quad \dots (3.4)$$

で与えられる。

4. 獲得情報量最大仮説に基づく状態遷移確率の算定

4.1. 厳密解 (3.4) 式を最大にする状態遷移を以下の4式の規格化条件の下で評価する。

$$\sum_{ij} Q_{ij} \cdot P_{ij} = P_j \quad \dots (4.1), \quad \sum_i P_i = 1 \quad \text{あるいは} \quad \sum_j P_j = 1 \quad \dots (4.2) \quad \sum_i Q_{ij} = 1 \quad \dots (4.3) \quad \sum_j P_{ij} = 1 \quad \dots (4.4)$$

ここで、 P_i , $P_{is}(j)$ は未知量であり、 Q_0 も流域内の面積降雨確率と考えれば決定すべき未知量である。これは一種の最適化問題であり、Lagrange の乗数法で解かれる。すなわち $P_{is}(j)$ は(4.5)式で与えられ、それに含まれる V_j は(4.6)式から決定される。

$$P_{is}(j) = \frac{V_j \cdot \exp(C \cdot l_{ijs})}{\sum_j V_j \cdot \exp(C \cdot l_{ijs})} \quad \text{--- (4.5)}, \quad V_j \cdot \sum_{i=0}^j \left\{ \frac{P_i \cdot Q_0 \cdot \exp(C \cdot l_{ijs})}{\sum_j V_j \cdot \exp(C \cdot l_{ijs})} \right\} = P_j \quad \text{--- (4.6)}$$

ここに、 $C = \max I'$ 。

4.2. 近似解 (4.5), (4.6)式から $P_{is}(j)$ を計算するには Iteration 法を取らねばならず多くの計算時間を要することにも、いくつかの問題点を抱えているため、次に近似解を提案する。1つの近似解はすでに提案している³⁾が、ここでは、さらに精度を高めるため(4.4)式を

$$\sum_{ij} P_i \cdot Q_0 \cdot P_{is}(j) = Q_0 \quad \text{--- (4.7)}, \quad \sum_{ij} P_i \cdot Q_0 \cdot P_{is}(j) = P_i \quad \text{--- (4.8)}$$

なる2つの制約条件で代用する近似解を Lagrange の乗数法で求めると(4.9)式となる。この式に含まれる W は(4.10)式から、 W は(4.10)式の最大の正実根として決定される。

$$P_{is}(j) = \frac{P_i}{P_i} \cdot P_i \cdot W^{l_{ijs}} \quad \text{--- (4.9)}, \quad \sum_{ij} P_j \left\{ P_i \cdot Q_0 \cdot W^{l_{ijs}} - \delta_{ij} \right\} = 0 \quad \text{--- (4.10)}, \quad \left| \sum P_i \cdot Q_0 \cdot W^{l_{ijs}} - \delta_{ij} \right| = 0 \quad \text{--- (4.11)}$$

5. 実流域への適用と考察 Fig.1は(2.2)式において $R_i=0$ の期間を取り出し、流量の自然遊減曲線と同様な作用方法で得た貯留量の自然遊減曲線の概観図である。この曲線において、貯留状態 i に力なる降雨が作用して j という貯留状態になったとき、 j という貯留状態に遷移するのに要する時間を t_{ijs} とすると、特性値 l_{ijs} は実式で定数される。

$$l_{ijs} = \frac{10}{t_{ijs}} \quad \text{--- (5.1)}$$

この特性値を使って由良川流域荒倉地点で $P_{is}(j)$ を評価したもののうち、 E_1 という初期状態から E_j という状態への遷移確率を記載したのがTable1である。他の初期状態からの遷移状況も検討すると、理論値と実測値は全状態にわたり、かなりよく一致していることがわかる。

6. 結論 本研究により流出系に「獲得情報量最大仮説」を置き得ることが明らかにされた。今後、これらのモデルを他流域に適用することにより、その適用性および適用の限界性を確かめるとともに、才4号で提示した厳密解を実流域に適用できるように改善を加えたいと考えている。

<参考文献>

- 1) たとえば、高柳、地淵、寒川；降雨・流出変換システムのエントロピー的解法，昭和55年土木学会関西支部年講，昭和55年6月。
- 2) 高柳，地淵；エントロピー的にみた降雨・流出変換特性とそのモデル化，京大防災年報才23号，昭和55年4月。
- 3) 高柳，地淵，寒川；長期流出のエントロピー・モデル，才35回土木学会年講，昭和55年9月。

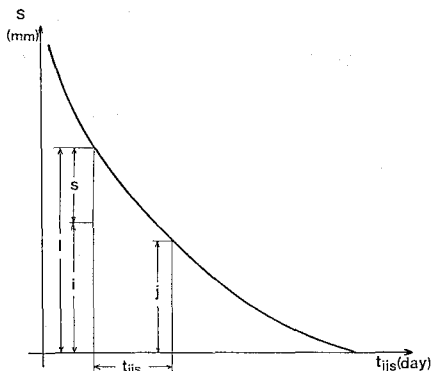


Fig.1 Schematic view of natural recession curve.

Table 1 Transition probability of runoff states, $P_{is}(j)$, in the case of E_1 , where the upper and the lower value of each blocks represent the calculated and the observed value, respectively.

$R_s \setminus E_j$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	...	E_{12}
R_1	1.000 1.000						
R_2	1.000 0.625	0.375					
R_3	0.031 0.500	0.967 0.500					
R_4	0.031 0.031	0.969 1.000					
R_5	0.002	0.031	0.968 1.000				
R_6		0.005	0.072	0.345	0.577		