II-306　標準ガンマ分布の諸量に関する実用解法

北海道大学工学部　正員 ○ 星　清　正員　山岡　勲

1．はじめに　ピアソン 3型、対数ピアソン 3型、一般化ガンマ（超ガンマ）分布等の確率分布形は水文統計解析に広く適用されている。これらの分布形の実際上の適用にあたっての難点として次の問題があげられる。すなわち、(1) Monte Carlo 法において標準ガンマ変量を効率よく発生できる方法はあるか？ (2) T一年確率水文量の区間推定に必要となる標準ガンマ変量の形状母数に関する微係数算定のための実用 algorithm はあるか？　本報告では、上記の要求に応える方法として、Kirbyの手法を拡張して近似式を提案し、すでに提案されている近似式との比較検討を行なう。

2．方法論　理論展開の容易化のため、ガンマ型分布形として、ピアソン 3型分布 (P3) を例にとって議論を進めることにする。P3分布の密度関数は (1)式で定義される。ここで、a，b，c は分布母数であり、$\Gamma(b)$はガンマ関数である。一方、P3分布の分布関数は (2) ～ (4)式で与えられる。ここで、p は非超過確率、$F(w;b)$は累加分布関数である。(3)式の w は標準ガンマ変量、(4)式は標準ガンマ分布として知られている。実用解析上の最大の関心事は p，b が既知のもとで (2)式を w について解くことである。多くの計算機センターは (2)式を解くための subroutine を備えている。しかしながら、Monte Carlo 法における標準ガンマ変量 w の発生にこの subroutine を利用することは、演算時間から言っても賢明な方策とはいえない。したがって、Monte Carlo 法では (2)式の逆変換近似式が必要となる場合が多い。水文量が P3分布に従がうとしたとき、T一年確率水文量推定値 (Y_T) とその分散 [$Var(Y_T)$] はそれぞれ、(2)、(3)式により (5)式と (6)式で与えられる。ここで、w_T は推定母数 b と確率レベル p ($a>0$のとき$1-1/T$であり、$a<0$のとき $1/T$ である) に依存する標準ガンマ変量である。また、$Var(\cdot)$、$Cov(\cdot,\cdot)$はそれぞれ、推定母数の分散・共分散であり、母数推定法（積率法、最尤法）に応じて算定可能である。さて、(6)式の $Var(Y_T)$ を計算するに際しての難点はいかにして標準ガンマ変量の形状母数に関する微分量、$\partial w_T/\partial b$ を高精度で近似するかという所にある。$\partial w_T/\partial b$ のよい近似値を得る方法としては、(2)式より再現期間 T 毎に標準ガンマ変量 w を b について算出し、その数値解を b の多項式で展開したのち $\partial w_T/\partial b$ を求める手法が考えられる。しかしながら、この方法では T 毎に多項式展開するために、T の数が多くなるにつれて入力する多項式の係数の個数が非常に多くなる。以下に、Kirbyの修正 Wilson一Hilferty変換式を拡張して $\partial w_T/\partial b$ を容易に求める方法を紹介する。

(4)式の標準ガンマ分布の平均値 (μ)、標準偏差 (σ)、歪度 (γ) は (7)式で与えられる。したがって、(8)式で定義される新しい変量の平均値は 0、分散は 1、歪度は $2/b^{1/2}$となる。(8)式の K の値は洪水頻度解析では frequency factor として知られている。種々の確率レベル p と歪度 $\gamma = 0.0(0.1)4.8(0.2)9$ について、Harter は K の値を数表化している。(8)式より w とその微係数はそれぞれ、(9)式と (10)式で与えられる。したがって、K が γ の関数として表現できれば、実用上、標準ガンマ分布に従がう乱数の発生および $\partial w/\partial b$ の算定が容易となろう。Kirby はガンマ分布の近似解としてよく知られている Wilson一Hilferty 式が歪度が大なるにつれて精度が落ちることを指摘して、その修正方法を提案している。修正に必要なパラメータ A, B, G, H は歪度の関数として数表化されている。また、線形補

Table 1　Summary of equations

$$f(y;a,b,c) = [(y-c)/a]^{b-1}\exp[-(y-c)/a]/[|a|\Gamma(b)] \quad \cdots\cdots(1)$$

$$p = F(w;b) = \begin{cases} \int_0^w f(w;b)dw & a > 0 \\ 1 - \int_0^w f(w;b)dw & a < 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots(2)$$

where

$$w = (y-c)/a \quad \cdots\cdots(3) \qquad f(w;b) = \exp(-w)w^{b-1}/\Gamma(b) \quad \cdots(4)$$

$$Y_T = c + a w_T \quad \cdots\cdots(5)$$

$$Var(Y_T) = Var(c) + 2w_T Cov(c,a) + 2a(\partial w_T/\partial b)Cov(c,b) + w_T^2 Var(a) + 2aw_T(\partial w_T/\partial b)Cov(a,b) + a^2(\partial w_T/\partial b)^2 Var(b) \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\mu = b, \quad \sigma = b^{1/2}, \quad \gamma = 2/b^{1/2} \quad \cdots\cdots(7)$$

$$K = (w-b)/b^{1/2} \quad \cdots\cdots(8)$$

$$w = b + b^{1/2}K \quad \cdots\cdots(9) \qquad \partial w/\partial b = 1 + \frac{\gamma}{4}\left(K - \gamma\frac{\partial K}{\partial \gamma}\right) \quad \cdots\cdots(10)$$

$$K = A(Y - B) \quad \cdots\cdots(11) \qquad Y = \max[H, 1 - (\tfrac{G}{6})^2 + (\tfrac{G}{6})\xi]^3 \quad \cdots(12)$$

$$\hat{z} = a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + a_3\gamma^3 + a_4\gamma^4 + a_5\gamma^5 \quad \cdots\cdots(13)$$

$$\partial K/\partial\gamma = (\partial A/\partial\gamma)(Y - B) + A(\partial Y/\partial\gamma - \partial B/\partial\gamma) \quad \cdots\cdots(14)$$

間法ではパラメータ推定の精度はよくないとして、非線形補間公式を Kirbyは併示している。 しかしながら、Kirbyによる手法では、$\partial w_T/\partial b$ の算定は若干面倒である。

Kirbyの algorithm における同じパラメータを用いると、K の値 (Kirbyの表示では W^M)は (11)式と(12)式で定義される。

(12)式中の ξ は確率レベル p ($a>0$のとき $1-1/T$、$a<0$のとき $1/T$)に対する標準正規分布の quantile である。 Kirbyによって数表化されているパラメータ A, B, G, H (歪度 γ にのみ依存)に直交多項式をあてはめ、γ について整理すると (13)式の近似式が得られる。 $\hat{z}$ は 4個のパラメータのいずれかの推定値であり、それぞれのパラメータについての回帰係数が表ー2に示されている。 なお、表中の MRE は推定値の最大相対誤差であり、これはすべて $\gamma = 0.25$ で起っている。 Harter による数表化されている K値を詳細に調べると、$\gamma > 3$ でしかも分布の lower tails で K値は一定値をとる。 したがって、H^3 の誤差 4.38% は実際上問題とはならない。 というのも、$\gamma < 3$ では $H < 1-(G/6)^2+(G/6)\xi$ となるからである。 (11)式を γ について微分すれば、(14)式が得られ、それぞれのパラメータの γ に関する微係数は (13)式の近似式により容易に算定できる。

Table 2 Coefficients of a polynomial in γ for each of the parameters

	G	1/A	B	H^3
a_0	-0.385205E-2*	0.199447E-2	0.990562E+0	-0.365164E-2
a_1	0.100426E+1	0.484890E+0	0.319647E-1	0.175924E-1
a_2	0.651207E-2	0.230935E-1	-0.274231E-1	-0.121835E-1
a_3	-0.149166E-1	-0.152435E-1	0.777405E-2	0.782600E-2
a_4	0.163945E-2	0.160597E-2	-0.571184E-3	-0.777686E-3
a_5	-0.583804E-4	-0.558690E-4	0.142077E-4	0.257310E-4
MRE** (%)	0.99	0.41	0.30	4.38

* Read -0.385205E-2 as -0.385205×10^{-2}

** Maximum relative error of parameter estimate ($0.25 \leq \gamma \leq 9.75$)

Table 3 Comparison of approximations to standardized gamma variates, K and their derivatives, $\partial K/\partial\gamma$

		Harter, K_H	Kirby, K_K	Modified Kirby, K_{MK}		Bobée, K_B	
γ	p	K_H	$K_H - K_K$	$K_H - K_{MK}$	$\partial K_{MK}/\partial\gamma$	$K_H - K_B$	$\partial K_B/\partial\gamma$
0.5	0.001	-2.39867	0.0112	0.0211	1.247	-0.0126	1.327
	0.010	-1.95472	0.0046	0.0129	0.687	-0.0003	0.754
	0.100	-1.21618	-0.0003	0.0055	0.113	0.0021	0.155
	0.500	-0.08302	-0.0004	0.0022	-2.000	-0.0006	-0.165
	0.900	1.32309	0.0011	0.0001	0.027	-0.0001	0.059
	0.990	2.68572	-0.0025	-0.0066	0.692	-0.0002	0.699
	0.999	3.81090	-0.0111	-0.0178	1.491	-0.0006	1.447
1.0	0.001	-1.78572	0.0329	0.0368	1.092	0.0020	1.062
	0.010	-1.58838	0.0186	0.0232	0.696	-0.0021	0.706
	0.100	-1.12762	0.0011	0.0064	0.207	-0.0003	0.206
	0.500	-0.16397	-0.0032	0.0020	-0.141	0.0002	-0.160
	0.900	1.34039	0.0051	0.0086	0.000	-0.0000	0.010
	0.990	3.02256	-0.0033	-0.0028	0.636	0.0000	0.646
	0.999	4.53112	-0.0365	-0.0393	1.473	0.0003	1.425
3.0	0.001	-0.66667	-0.0000	-0.0002	0.221	-0.0016	0.187
	0.010	-0.66663	0.0000	-0.0002	0.221	-0.0022	0.212
	0.100	-0.66023	0.0064	0.0062	0.221	0.0006	0.208
	0.500	-0.39554	-0.0127	-0.0134	-0.080	-0.0001	-0.054
	0.900	1.18006	0.0003	-0.0013	-0.133	-0.0001	-0.157
	0.990	4.05138	0.0574	0.0558	0.336	-0.0001	0.378
	0.999	7.15235	-0.0850	-0.0857	1.153	0.0000	1.170

3. 解析比較例 本報告で紹介した近似式による K値および $\partial K/\partial\gamma$ を今迄に提案されている近似式による値と比較した数例を表ー3に示す。 なお、表中の γ は歪度、 p は確率レベルである。 また、K_H, K_K, K_{MK}, K_B はそれぞれ、 Harter、Kirby、拡張Kirby、Bobee による K値である。 このうち Harter による算定値、K_H が最も精度が高いので、 K_H との差で近似値の精度を評価している。 Bobeeによる近似式は、Harterの数表値 K_H を p 毎に 多項式展開した結果であり、当然のことながら、近似値中最も精度が高い。 K_{MK} と K_K を比較してもその誤差はほぼ同程度である。 また、$\partial K_{MK}/\partial\gamma$ と $\partial K_B/\partial\gamma$ を比べても $\partial K_{MK}/\partial\gamma$ は実用上十分な精度を有していると考えられる。 したがって、本報告で述べた拡張 Kirby 法はプログラム化が容易で、入力係数値の数が少なくてすみ、しかも任意の確率レベル p について標準ガンマ分布に関する諸量を算定できる点で実用解析上、きわめて有効である。

参考文献 Bobee, Comment on fitting the Pearson type 3 distribution in practice by Buckett and Oliver, WRR,15(3), 730, 1979. Harter, A new table of percentage points of the Pearson type III distribution, Technometrics, 11(1), 177-187, 1969. Kirby, Computer-oriented Wilson-Hilferty transformation that preserves the first three moments and the lower bound of the Pearson type 3 distribution, WRR, 8(5), 1251-1254, 1972.