

京都大学大学院 学生員 細田 尚
京都大学工学部 正員 岩佐 義朗

1. はじめに. 波状水路上の流れは, 河床波の発生との関係より重要で, 特に, 底面せん断応力分布を知ることが必要である。このため, 直交曲線座標系の一次元運動量方程式を用いて, 底面せん断応力, 水路床波高, 水深との一般的な関係式を導き, 水路床と底面せん断応力との位相差について考察した。

2. Iwasa・Kennedyの理論⁽¹⁾の要約

Iwasa・Kennedyは, 直交曲線座標系の一次元エネルギー方程式を用いて, 水路床と水深の線型化された, 3rd-orderの関係式として, 次式を得た。

$$-\frac{F_0^2}{3} \frac{d^3 \eta_1}{d\sigma^3} + (F_0^2 - 1) \frac{d^2 \eta_1}{d\sigma^2} + P \eta_1 = \frac{1}{2} F_0^2 \frac{d^3 \delta}{d\sigma^3} + R \frac{d^2 \delta}{d\sigma^2} + \frac{d\delta}{d\sigma} \quad (1)$$

図-1 に用いられた座標系を示す。また, η_1 , δ , σ , R , P , F_0 は次式で示される。

$$\eta_1 = \frac{y - y_0}{y_0}, \sigma = \frac{x}{y_0}, \delta = \frac{h}{y_0}, R = \frac{f_0 F_0^2}{8} = \tan \beta, f; \text{摩擦損失係数}$$

$$P = R \left[3 - \frac{y_0}{f_0} \left(\frac{\partial f}{\partial y_0} \right) \right], F_0^2 = \frac{Q^2}{g y_0^3 \cos \beta} \quad (2)$$

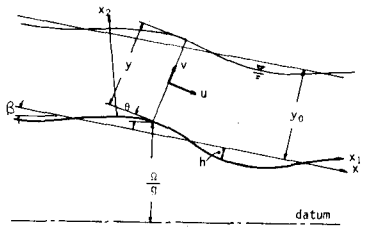


図-1 座標系

水深と水路床の位相差 ϕ の概略は,

$$F_{01} = \frac{\sqrt{2}}{\mu}, F_{02} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\mu^2/3)}}, F_{03} = \sqrt{\frac{\mu^2 - 3}{\mu^2(\frac{\mu^3}{3} - \frac{1}{2})}} \quad (3)$$

$\mu = 2\pi y_0 / L$, L ; 水路床の波長

として, 図-2 のようになる。図中, 点線は, 完全流体のとき, 位相差 ϕ が $0, \pi$ となる境界 $F_0^2 = \tanh \mu / \mu$ である。

3. 一次元運動量方程式による解析

図-1 の直交曲線座標系で, 一次元運動量方程式⁽²⁾は次式となる。

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^y u^2 dx_2 + \int_0^y (1 + k x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\Omega}{g} \right) dx_2$$

$$= -\frac{\tau_b}{\rho g} + \int_0^y k \frac{1}{\rho g} (-\rho u v) dx_2 \quad (4)$$

ここに, $k = d\theta/dx_1$ 。

Iwasa・Kennedy に従って,

$$u = U f\left(\frac{x_2}{y}\right), \frac{v}{u} = \frac{x_2}{y} \frac{1}{1 + k x_2} \frac{dy}{dx_1}, f\left(\frac{x_2}{y}\right) = \frac{n+1}{n} \left(\frac{x_2}{y}\right)^{1/n} \quad (5)$$

とし, ピエゾ水頭は, x_2 方向の運動量方程式

$$-\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p}{\rho g} + \frac{\Omega}{g} \right) = \frac{1}{g} \left(\frac{u}{1 + k x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{k u^2}{1 + k x_2} \right) \quad (6)$$

より求めると, 次式が得られる。

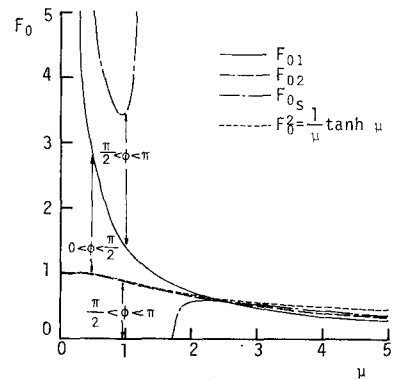


図-2 位相差の概略

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta Q^2}{g} \frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx_1} - \sin \theta (y + k y^2) + \frac{d}{dx_1} \left\{ \frac{y^2}{2} \cos \theta - \frac{k Q^2}{g} \phi_1 + \frac{Q^2}{g y} \left[y \left(\frac{d^2 y}{dx_1^2} \right) - \left(\frac{dy}{dx_1} \right)^2 \right] \phi_2 \right. \\
& \left. - \frac{Q^2}{g y} \left[k y \left(\frac{dy}{dx_1} \right)^2 + y^2 \frac{dy}{dx_1} \frac{dk}{dx_1} \right] \phi_3 \right\} + k \frac{d}{dx_1} \left\{ \frac{y^3}{6} \cos \theta - \frac{k Q^2 y}{g} \psi_1 + \frac{Q^2}{g} \left[y \left(\frac{d^2 y}{dx_1^2} \right) - \left(\frac{dy}{dx_1} \right)^2 \right] \psi_2 \right. \\
& \left. - \frac{Q^2}{g} \left[k y \left(\frac{dy}{dx_1} \right)^2 + y^2 \frac{dy}{dx_1} \frac{dk}{dx_1} \right] \psi_3 \right\} = -\frac{\tau_b}{\rho g} - \frac{k}{g} \frac{Q^2}{y} \frac{dy}{dx_1} \chi
\end{aligned} \quad (7)$$

$\beta, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \chi$ は $f(x_2/y)$ に関する定数。

$$\xi = \frac{x_1}{L}, \quad \eta = \frac{y}{H}, \quad F = \frac{Q^2}{g H^3}, \quad k' = k L, \quad \epsilon = \frac{H}{L} \quad (8)$$

といて、ordering analysis を行なえば、

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sin \theta \cdot \eta + \frac{\tau_b}{\rho g H} \right\} \epsilon^0 + \left\{ -\beta^2 F^2 \frac{1}{\eta^2} \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\eta^2}{2} \cos \theta \right) \right\} \epsilon^1 \\
& + \left\{ -k' \eta^2 \sin \theta - \frac{d}{d\xi} (k' F \phi_1) + \frac{k' F^2}{\eta} \frac{d\eta}{d\xi} \chi \right\} \epsilon^2 \\
& + \left\{ \frac{d}{d\xi} \left(\frac{F^2}{\eta} \left[\eta \left(\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right) - \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right] \phi_2 \right) + k' \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{6} \eta^3 \cos \theta - k' F^2 \psi_1 \right) \right\} \epsilon^3 \\
& + \left\{ -\frac{d}{d\xi} \left(\frac{F^2}{\eta} \left[k' \eta \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 + \eta^2 \frac{d\eta}{d\xi} \frac{dk'}{d\xi} \right] \phi_3 \right) + k' \frac{d}{d\xi} \left(F^2 \left[\eta \left(\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \right) - \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right] \psi_2 \right) \right\} \epsilon^4 + \dots
\end{aligned} \quad (9)$$

となり、(1)式と対応するように、3rd orderまで考える。

微小振幅の水路床を考えると、

$$x_1 \doteq x, \quad \sin \theta \doteq \sin \beta - \frac{dh}{dx} \cos \beta, \quad \cos \theta \doteq \cos \beta, \quad k \doteq \frac{d^2 h}{dx^2}, \quad \frac{dk}{dx_1} \doteq -\frac{d^3 k}{dx^3} \quad (10)$$

と近似され、(2)式の η, δ を用いて線型化すれば、

$$\begin{aligned}
& -\phi_2 F_0^2 \frac{d^3 \eta_1}{d\sigma^3} + (\beta F_0^2 - 1) \frac{d\eta_1}{d\sigma} + \tan \beta \eta_1 - \frac{\tau_b'}{\rho g y_0 \cos \beta} \\
& = \phi_1 F_0^2 \frac{d^3 \delta}{d\sigma^3} + \tan \beta \frac{d^2 \delta}{d\sigma^2} + \frac{d\delta}{d\sigma}
\end{aligned} \quad (11)$$

となる。ここに、 $\frac{\tau_b'}{\rho g y_0 \cos \beta} = \frac{\tau_b - \tau_0}{\rho g y_0 \cos \beta}$, $\tau_0 = \rho g y_0 \sin \beta$, $\tan \beta = R$ (12)

また、 β, ϕ_1, ϕ_2 は、 $n \rightarrow \infty$ のとき、それぞれ、 $\beta = 1$, $\phi_1 = 1/2$, $\phi_2 = 1/3$ となる。(11)式は、 τ_b', η_1, δ の一般的な関係を表わしており、(1)式と(11)式を比較すれば、(1)式の左辺第3項、(11)式の左辺第3、4項以外、まったく一致している。(1)式は、エネルギー-散逸項として、Darcy-Weisbachの式 $f Q^2 / 8 g y^2$ を用いている。それに対応して $\tau_b = \frac{f}{8} \rho u^2$ において、 y_0 のまわりで Taylor 展開すれば、 $\tau_b' = \frac{f Q^2}{8} \frac{\eta_1}{y_0^2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 y_0 - 2 f_0 \right]$ となり、これを(11)式に代入すると、(1)式とまったく一致する。さらに、 $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 y_0 \ll 2 f_0$ と仮定できるときには、 $\tau_b' = -2 R \eta_1$ となり $\tau_b' = \text{Imaj.} [\tau_b' \exp i(\mu\sigma + \psi)]$, $\eta_1 = \text{Imaj.} [\eta_0 \exp i(\mu\sigma + \psi)]$ を代入して、底面せん断応力と水路床との位相差 ψ が、 $\psi = \phi + \pi$ と表わせる。すなわち、一次元運動量方程式より得られた(11)式と、 $\tau_b = \frac{f}{8} \rho u^2$ とを連立して、底面せん断応力分布を得ることが出来る。

参考文献：(1) Iwasa, Y. Kennedy, J.F. ; Free Surface Shear Flow Over a Wavy Bed, Proc. ASCE, HY2 (1968) (2) 石原藤次郎編；水工水理学，丸善(1972)