II-286 波状面上の流れの研究

神戸市 正 員 末永清冬
神戸大学工学部 正 員 筧 源亮

1．まえがき

河川に生ずる河床波，海底の砂質底面上に生ずる砂れんなどの上の流れの場について調べることは，水工学上大変重要である。本研究ではこのような波状面上の流れについて、基礎的な理論解析を行なったものである。従来から理論解析を行なう際に単純な波面のみが取り扱われてきた。本研究では複雑な波面も比較的容易に近似的ではあるが、モデルの中に組み込めるスペクトラル法を適用して解析を行なった。

2．基礎方程式と境界条件

波面上の流れにおいて、流れの場は主流と波面が存在することにより誘起される摂動流とからなるものとする。さらにこの摂動流は、波面が一定の位相速度で移動する為に生じているものとする。

境界での条件が取り扱い易いように、ここでは直交曲線座標系を用いた。波面に沿ってξ軸、それにいたる所直交するようにζ軸をとるものとする。従って、基礎式、境界条件は(ξ,ζ)系で示す直交曲線座標系で考える。また、この座標系は位相速度 c で移動する移動座標系とする。本研究では、波面の表面 $\zeta=0$ の z 座標を次のようにフーリエ級数で与える。

$$Z(\xi,0)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(n\omega\xi) \tag{1}$$

ここに、A_n：波数 n の場合の波面の振幅，$\omega:2\pi/L$（L は波面の波長）。このとき、通常の直交座標系 (X,Z) 系と (ξ,ζ) 系との変換式は次のようになる。

$$X(\xi,\zeta)=\xi-\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(n\omega\xi)\exp(-n\omega\zeta) \qquad Z(\xi,\zeta)=\zeta+\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(n\omega\xi)\exp(-n\omega\zeta) \tag{2}$$

(2)式を用いて、直交曲線座標系で表示したナビア・ストークスの方程式と連続式とを求める。次に、波面の効果を一層明確にする為に次のような展開を基礎式に代入する。

$$\left.\begin{aligned} u&=U_0(\zeta)-c+u'(\xi,\zeta,t)\\ w&=w'(\xi,\zeta,t)\\ p&=P(\zeta)+p'(\xi,\zeta,t)\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

ここに、$c=(g/k)^{1/2}$ (k:波数) となる位相速度，U_0：主流のξ方向の流速成分，P_0：主流の圧力，u'，w'，p'：波面により誘起される摂動成分。結局、主流は既知として摂動成分について成立する関係式のみを取り出す。ξ方向の運動方程式について示すと次のようになる。

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+u'\frac{\partial u'}{\partial \xi}+w'\frac{\partial u'}{\partial \zeta}-u'w'\lambda_\xi-w'^2\lambda_\zeta=-\frac{\partial p'}{\rho\partial\xi}+\nu\left(\frac{\partial^2u'}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u'}{\partial\zeta^2}\right)+(U_0-c)w'\lambda_\xi-(U_0-c)u'\frac{\partial u'}{\partial\xi} \tag{4}$$

ここに、$\lambda_\xi=-\sum A_n(n\omega)^2\cos(n\omega\xi)\exp(-n\omega\zeta)$ $\quad\lambda_\zeta=\sum A_n(n\omega)^2\sin(n\omega\xi)\exp(-n\omega\zeta)$

摂動成分についての境界条件は、(ξ,ζ)系が移動座標系であることと(3)式のような展開を行なうことから次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} \zeta&=0 \qquad u'=-(U_0-c)\ ,\ w'=0\\ \zeta&=h \qquad u'=0\ ,\ w'=0\ ,\ p'=0\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ここに、波面の影響の及ぶ高さの上限を h としている。この値は後に示す。

3．計算の方法

スペクトラル法は、フーリエ変換に基づく方法である。基礎方程式、境界条件を時間方向とξ方向とに2重にフーリエ変換を行なう。残りの変数ζについては、(5)式を考慮して差分法を適用する。これは、流れの場がある周期 2τ で時間的に繰辺されて、また波面が波長 L で繰辺しξ方向に存在しているものとしていることに相当する。すなわちu'を次のように表わすことができる。

$$u'=\sum_{n=0}^{M}\sum_{k=0}^{K}V(n,k,\zeta)\exp[i\pi(kt/\tau)]\exp[i2\pi(n\xi/L)] \tag{6}$$

ここに、$V(n,k,\zeta)$：２重フーリエ振幅， M：ξ方向の最大波数， K：t 方向の最大波数。
この方法の利点は、与えられた波数 n,k についてV をζごとに決定することにより解を反復計算する必要がないことである。ここでは、定常問題であり波面は波数１の単一の波としているので k=0,n=0,1となる。
(4) 式を２重にフーリエ変換すると、フーリエ振幅について４つの式が得られる。すなわち、１回の変換で実部と虚部とに分離し、次の変換でさらにそれぞれを実部、虚部に分離する。(4)式を変換したもののうち、１回目の変換で実部、次の変換でその実部と虚部のうち実部のみを表示すると次のようになる。

$$-kW_{RI}(n,k)-n(U_0-c)U_{IR}(n,k)+\frac{\pi^2}{2L^2}(U_0-c)\sum_{\substack{m'=-M\\ n\neq m'}}^{M}W_{RR}(m',k)(n-m')^2A_{|n-m'|}$$
$$=\frac{n}{\rho}P_{IR}(n,k)-n^2\nu U_{RR}(n,k)+\nu\frac{d^2U_{RR}(n,k)}{d\zeta^2}+(NL_\xi)_{RR} \tag{7}$$

ここにW_{RI} ,U_{IR}･･･ はフーリエ振幅,(NL_ξ):ξ方向の非線型項をまとめて表示したものであり、フーリエ振幅の積の型となっている。
(7)式に示しているような連立常微分方程式を２重フーリエ変換した境界条件のもとで、差分法で解くことになる。

４．計算の結果と考察

計算は波数を０，１とした波($L=10cm,A_1=1cm$)を波面として、(5)式の$h=3A_1$ として行なった。また、簡単の為に主流の効果を考えず$U_0=0$ としている。
図１に流速ベクトルを示す。この流速ベクトルの特長として次のことが分った。

(1)線型解の場合

○波面の山から谷へ行くに従って流速の絶対値は小さくなり、谷の部分で最小となる。

○波高が増大すると、山の部分と谷の部分とで比較して流速差が大きくなる。

(2)非線型解の場合

○線型解の場合と比較して、ξ 方向の流速成分にはあまり顕著な差は見られない。 しかしながら、ξ方向への分布をこれについて見ると、線型解と比較して非線型解の場合は波面との位相の差が変化している。
これは非線型項の効果によるものである。本研究では、非線型項を含むとき反復法を用いて収束計算を行なった。

○波面の周辺の圧力分布を見ると、非線型項の与える効果はわずかで線型解とあまりかわらない。

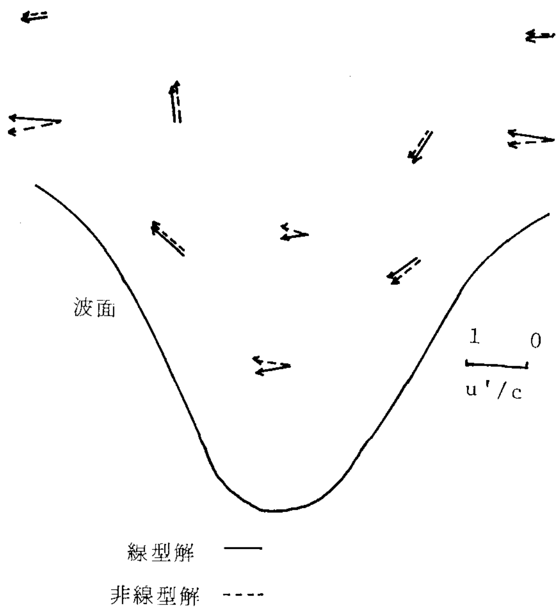

図１　　摂動成分の流速ベクトル

５．あとがき

単一波形の波状面上の流れの場について、特に摂動流のみが存在する場合の性質を明らかにした。
理論的には (1) 式のように複雑な波状面においてもこの手法は適用可能であり、今後はそのような波面上の流れの場について波数を多くとることにより応用ができるものと考えられる。

（参考文献） 1)T.Iwashima,S.Moriyama and R.Yamamoto;A Spectral Model for tne Study of the Atomospheric General Circulation . J。Meteor. Soc. Japan,Vol.57,No.2,pp97-110.