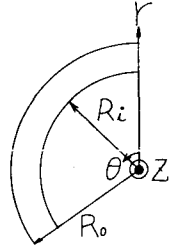


立命館大学大学院 学生員 山野 邦明
立命館大学理工学部 正員 大同 淳久

はじめに 開水路曲線部での粒子流の横断方向の表面形は、水の場合にくらべ勾配が急であるといわれている。そこで、図1に示すような曲線開水路での粒子流の表面形について、考察を行なう。座標系は、 $x^i = (r, \theta, z)$ なる円筒座標系を用いる。
基礎方程式、連続式、運動方程式は、それぞれ、



$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v^i_{;i} = 0 \quad \text{--- (1)} \quad \rho \frac{dv^i}{dt} = \sigma^{ij}_{;j} + \rho b^i \quad \text{--- (2)}$$

で表わされる。ここで、 ρ は、粒子流のみかけの密度、 v^i は速度ベクトル、 σ^{ij} は、応力テンソル、 b^i は、体積加速度、 $;$ は、共変微分を表わす。構成方程式として、金谷による構成方程式を用いる。すなわち、

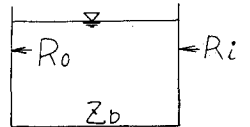


図 1

$$p = \frac{2}{5} T_e a^2 \frac{\rho_0 \rho}{\rho_0 - \rho} \hat{\omega}^2 \quad \text{--- (3)} \quad \sigma^{ij} = -\delta^{ij} p + \frac{3}{10} C(\rho) \hat{\omega} E^{ij} + \frac{1}{2} C(\rho) \hat{\omega} R^{ij} \quad \text{--- (4)}$$

$$\text{ただし、} \hat{\omega} = \left[\frac{3}{10} E^{ij} E_{ij} + \frac{1}{2} R^{ij} R_{ij} + \frac{a^2}{10} (\Omega^{ij} \Omega_{ik} \Omega_{jk} + \Omega^{ijk} \Omega_{ijk} + \Omega^{ijk} \Omega_{jik}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{--- (5)}$$

$$C(\rho) = \frac{2\sqrt{6}}{5} T_e \mu \frac{a^3 \rho_0 \rho}{\rho_0 - \rho} \quad \text{--- (6)} \quad E^{ij} = \frac{1}{2} (v^{i;j} + v^{j;i}) - \frac{1}{3} \delta^{ij} v^k_{;k} \quad \text{--- (7)}$$

$$R^{ij} = \frac{1}{2} (v^{ij} - v^{ji}) - w^{ij} \quad \text{--- (8)} \quad \Omega^{ijk} = w^{ijk} \quad \text{--- (9)}$$

ここで、 T_e : 定数、 a : 粒径、 ρ_0 : 最密充填時のみかけの密度、 $\hat{\omega}$: 粒子流の特性を示すスカラー値テンソル関数、 μ : 摩擦係数、 δ : Kronecker の δ 、 w^{ij} : 回転速度テンソル。
(4) を (2) に代入し、(1) を用いて整理すると、

$$\rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j v^i_{;j} \right) = -\delta^{ij} p_{;j} + \left[C(\rho) \hat{\omega} \left\{ \frac{1}{10} \delta^{ij} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^k \rho_{;k} \right) + \frac{2}{5} v^{ij} - \frac{1}{10} v^{ji} - \frac{1}{2} w^{ij} \right\} \right]_{;j} + \rho b^i \quad \text{--- (10)}$$

横断方向の水面形 水路床は、固定床とし、 r 方向に勾配をもたないとする。又、 r を一定にしたときの水路床の θ 方向の勾配は一定である。すなわち、路床高を $z_b(r, \theta)$ で表わしたとき、

$$\frac{\partial z_b}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial z_b}{\partial \theta} = 4rv = \text{const.} \quad \text{--- (11)}$$

であるとする。流れが定常であるとする、 $\partial v^i / \partial t = 0$ 、 $\partial \rho / \partial t = 0$ である。(10) の r 方向のつりあい式を書きかえすと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} = & \frac{1}{r} \rho v^{\theta^2} - \rho v^r \frac{\partial v^r}{\partial r} - \rho v^z \frac{\partial v^r}{\partial z} + \frac{3}{10} \frac{\partial (C(\rho) \hat{\omega})}{\partial r} \frac{\partial v^r}{\partial r} + \frac{2}{5} \frac{\partial (C(\rho) \hat{\omega})}{\partial z} \frac{\partial v^r}{\partial z} - \frac{1}{10} \frac{\partial (C(\rho) \hat{\omega})}{\partial z} \frac{\partial v^z}{\partial r} \\ & + C(\rho) \hat{\omega} \left\{ \frac{3}{10} \frac{\partial^2 v^r}{\partial r^2} + \frac{2}{5} \frac{\partial^2 v^r}{\partial z^2} - \frac{1}{10} \frac{\partial^2 v^z}{\partial r \partial z} \right\} + C(\rho) \hat{\omega} \left(\frac{2}{5} \frac{1}{r} - \frac{1}{10} \frac{1}{r} \right) \frac{\partial v^r}{\partial r} - \frac{3}{10} \frac{v^r}{r^2} \quad \text{二次流の項 I} \\ & + \frac{1}{10} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\rho} C(\rho) \hat{\omega} \left\{ v^r \frac{\partial \rho}{\partial r} + v^z \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\} \right) - \frac{1}{2} C(\rho) \hat{\omega} \left(\frac{\partial w^{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial w^{r^2}}{\partial z} \right) \quad \text{二次流の項 II} \quad \text{--- (12)} \end{aligned}$$

金谷のいうところの内部エネルギーに相当

粒子の回転の項

左辺は、半径方向の圧力勾配で、水面形の半径方向の勾配に相当する。右辺第一項は、遠心力の項である。
二次流の項 I と二次流の項 II を比較すると、一般的に II は I より小さいと思われる。それは、二次流そのものが余り大きくないであろうし、又、その二次導関数が渦流である二次流を生じさせるのに必要な加速度に相当する

からである。そこで流路の断面を図2のように四分し、それぞれの断面での二次流の項Ⅰのそれぞれの項の符号を、二次流の方向べつに、表1に示す。表1より、二次流の項Ⅰのうち、第3項～第5項が、二次流の方向に大きな影響をうけることがわかる。特に、 $C(p)\hat{\omega}$ の勾配が大きいと、表面形は、二次流の向きに大きく左右され、自由渦型の場合、強制渦型より、かなり勾配が急であることが予想される。次に、(12)中の内部エネルギーに相当する項について考察を行なう。内部エネルギーに相当する項を書きなすと

$$\frac{1}{10} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{p} C(p) \hat{\omega} \left\{ v^r \frac{\partial p}{\partial r} + v^z \frac{\partial p}{\partial z} \right\} \right) = \frac{1}{10} \hat{\omega} \left\{ v^r \frac{\partial p}{\partial r} + v^z \frac{\partial p}{\partial z} \right\} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{C(p)}{p} \right) + \frac{1}{10} \frac{C(p)}{p} \left\{ v^r \frac{\partial p}{\partial r} + v^z \frac{\partial p}{\partial z} \right\} \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\omega} \right) + \frac{1}{10} \frac{C(p)}{p} \hat{\omega} \frac{\partial}{\partial r} \left(v^r \frac{\partial p}{\partial r} + v^z \frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

$\partial p / \partial r > 0$ とすると $\partial (C(p)/p) / \partial r > 0$ であるから、第1項は正である。 $\hat{\omega}$ は、先にも述べたように粒子流の流動を支配する量で、粒子流のエネルギーの摩擦損失にかかわる接触角での相対速度を表わすと考えられる。すなわち、 p が増加すると $\hat{\omega}$ も増加するので、 $\partial \hat{\omega} / \partial r > 0$ 、従って第2項も正である。第3項の被微分項は、実は、 $d\theta/dt$ であり、 $r = \text{const.}$ の軸上で、 z 方向に積分すると、0になるので、(12)を最終的に積分したとき、0となる。以上の考察から、 $\partial p / \partial r$ すなわち $\partial h / \partial r$ を決定する要因として、特に $\hat{\omega}$ 及び $C(p)$ が重要であり、又、二次流の方向によって、その作用のしかたがちがってくることをわかる。すなわち、(12)中の二次流の項Ⅰの第3項～第5項、及び内部エネルギーの項から大きな意味をもつ。

さて、次にこの両者の中間である二次流が生じない場合について考察する。さらに、簡単なため、仮定として、みかけの密度 p は一定、二次導関数は0、 $\hat{\omega}$ は一定とする。すると、(12)式は、簡単に、

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r} p v^{\theta^2} - \frac{1}{2} C(p) \hat{\omega} \left(\frac{\partial w^{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial w^{rz}}{\partial z} \right) \dots (13)$$

また、 θ 方向のつりあい式を、上と同様の仮定のもとに書きくだすと

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = C(p) \hat{\omega} \left\{ \left(\frac{4}{5} \frac{1}{r} + \frac{2}{5} \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial v^{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \right) v^{\theta} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w^{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial w^{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r} w^{\theta r} \right) \right\} \dots (14)$$

これを変形すると、

$$v^{\theta} = \frac{2}{r-1} \left[\frac{1}{C(p) \hat{\omega}} r \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{2}{5} (2r+1) \frac{\partial v^{\theta}}{\partial r} + \frac{r^2}{2} \left(\frac{\partial w^{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial w^{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r} w^{\theta r} \right) \right] \dots (15)$$

(13)に代入すると $\partial p / \partial \theta = i(r)$ $\partial p / \partial r = \partial h / \partial r$ とし ($\because p = \text{const.}$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} &= \frac{4}{r(r-1)^2} p \left[\left(\frac{r i(r)}{C(p) \hat{\omega}} \right)^2 + \frac{4}{25} (2r+1)^2 \left(\frac{\partial v^{\theta}}{\partial r} \right)^2 + \frac{r^4}{4} \left(\frac{\partial w^{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial w^{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r} w^{\theta r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{5} \frac{i(r)}{C(p) \hat{\omega}} r (2r+1) \frac{\partial v^{\theta}}{\partial r} + \frac{i(r)}{C(p) \hat{\omega}} r^3 \left(\frac{\partial w^{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial w^{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r} w^{\theta r} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{5} r^2 (2r+1) \frac{\partial v^{\theta}}{\partial r} \left(\frac{\partial w^{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial w^{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r} w^{\theta r} \right) \right] - \frac{1}{2} C(p) \hat{\omega} \left(\frac{\partial w^{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial w^{rz}}{\partial z} \right) \dots (16) \end{aligned}$$

(16)式より粒子流の横断方向の表面形は、路床勾配、半径方向の dilatant 効果、粒子の回転等によって定まることがわかる。

最後に(16)を見ると粒子の回転については、評価が困難であるが、それを無視すれば、粒子流としての特徴は、半径方向の dilatant 効果だけである。しかし、実際の流れの中で、 $\partial v^{\theta} / \partial r$ はそれほど大きいとは思えない。これは $\partial C(p) / \partial r$ 及び $\partial \hat{\omega} / \partial r$ がけちして無視しないからであると思われる。今後、実験を通して、(12)式の、それぞれの項の比較を行なって行きたいと思う。 参；金谷：機械学会論文集(B) 45巻 392号 pp515～522

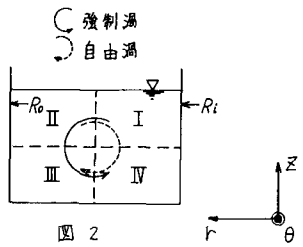


図 2

2次流	項	I	II	III	IV
強制渦	1	-	+	-	+
	2	+	-	-	+
	3	+	-	-	+
	4	-	-	-	-
	5	-	-	-	-
自由渦	1	+	-	+	-
	2	-	+	+	-
	3	+	-	-	+
	4	+	+	+	+
	5	+	+	+	+

表 1