II-261　中規模河床形態の領域区分に関する研究

北海道大学工学部　正員　○黒木　幹男
〃　　　〃　　　岸　　力

1．はじめに　中規模河床形態の領域区分は次元解析的な検討と河床安定理論に基づく検討が並行して行なわれてきている。安定理論による解析の多くは、河床攪乱の波長が主要なパラメータとなっており、次元解析的な手法に基いて得られる領域区分図との関連については十分な説明がなされていない。本研究では安定理論の立場から検討を行ない領域区分図の提案を行なった。

2．基礎方程式　直線の広矩形水路を考え、流れは準定常・浅水流とすると慣用の記号を用いて式(1〜3)のように表わせる。式(4)は流砂の連続式である。

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=gI_0-\frac{\tau_x}{\rho h}-g\frac{\partial}{\partial x}(h+\eta) \quad \cdots\cdots(1)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\tau_y}{\rho h}-g\frac{\partial}{\partial y}(h+\eta) \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(uh)+\frac{\partial}{\partial y}(vh)=0 \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{1}{1-n}\left(\frac{\partial q_{bx}}{\partial x}+\frac{\partial q_{by}}{\partial y}\right)=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

次に各変量を基本流に対応する平均値と河床の微小な攪乱に対応する変動値に分けて表わし、式(1〜4)に代入し線型化すると式(5〜8)のようになる。波型で上に付して表わした未知量は8個であり、関係式があと4つ必要である。必要な関係式は以下に記すような考察の結果、式(9〜12)で与えられる。

$$U_0\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+g\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x}+\frac{\tau_{b0}}{\rho H}\left(\frac{\tilde{\eta}}{H}-\frac{\tilde{\xi}}{H}+\frac{\tilde{\tau}_x}{\tau_{b0}}\right)=0 \quad \cdots\cdots(5)$$

$$U_0\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}+g\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y}+\frac{\tau_{b0}}{\rho H}\frac{\tilde{\tau}_y}{\tau_{b0}}=0 \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{u}}{U_0}+\frac{\tilde{\xi}}{H}-\frac{\tilde{\eta}}{H}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tilde{v}}{U_0}\right)=0 \quad \cdots\cdots(7)$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial t}+\frac{q_{b0}}{1-n}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{q}_{bx}}{q_{b0}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tilde{q}_{by}}{q_{b0}}\right)\right\}=0 \quad \cdots(8)$$

式(9)は流れの抵抗則より導かれる。Manning-Strickler型の抵抗則

$$\frac{u}{u_*}=6.9\left(\frac{h}{d}\right)^{1/6} \qquad \text{(}d\text{は河床砂の平均径)}$$

の成立を仮定すれば、$\alpha_1=2$，$\alpha_2=-1/3$　と与えられる。

式(10, 11)はy方向に一様に傾いた斜面上での砂粒の運動方程式を解き、抗力の作用方向および砂粒の運動方向を見積ることによって決定された。係数の値は次式で与えられる。

$$\alpha_3=\frac{3}{2}\frac{\phi}{\varphi_0}\frac{1}{\mu\sqrt{\tau_{*0}}} \quad , \quad \alpha_4=-\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau_{*0}}\cdot\frac{\mu}{\mu_c}}$$

ただし、$\phi=\phi(\tau_{*0})$は流砂関数、$\varphi_0=U_0/u_{*0}$は抵抗係数。

式(12)は流砂量と河床せん断力の間の位相差δを考慮して、流砂関数より導かれ、$\alpha_5=\tau_{*0}\phi'/\phi$　で与えられる。式中のδは、非平衡時の流砂の連続式より砂粒の平均移動距離λ_mと一致し、ここではEinstein[1]の表現を用いている。

$$\tilde{\tau}_x/\tau_{b0}=\alpha_1\frac{\tilde{u}}{U_0}+\alpha_2\left(\frac{\tilde{\xi}}{H}-\frac{\tilde{\eta}}{H}\right) \quad \cdots\cdots(9)$$

$$\tilde{\tau}_y/\tau_{b0}=\frac{\tilde{v}}{U_0}+\alpha_3\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \quad \cdots\cdots(10)$$

$$\tilde{q}_{by}/q_{b0}=\frac{\tilde{v}}{U_0}+\alpha_4\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \quad \cdots\cdots(11)$$

$$\tilde{q}_{bx}/q_{bo}=\alpha_5\left\{(\tilde{\tau}_x/\tau_{b0})-\delta\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\tau}_x/\tau_{b0})\right\} \quad (12)$$

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\eta}/H &= \eta_0\cos(\ell\hat{y})\exp\{ik(\hat{x}-c\hat{t})\}\\
\tilde{\xi}/H &= \xi_0\cos(\ell\hat{y})\exp\{ik(\hat{x}-c\hat{t})\}\\
\tilde{u}/U_0 &= u_0\cos(\ell\hat{y})\exp\{ik(\hat{x}-c\hat{t})\}\\
\tilde{v}/U_0 &= v_0\sin(\ell\hat{y})\exp\{ik(\hat{x}-c\hat{t})\}
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(13)$$

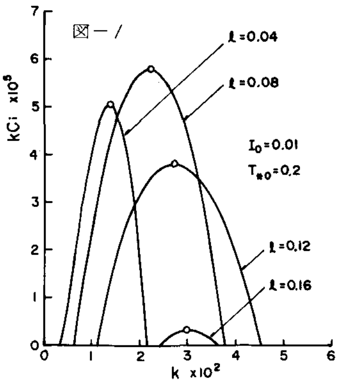
3．安定解析　河床の攪乱とそれによって誘起される変動を式(13)のように与える。ただし、$\hat{x}=x/H$，$\hat{y}=y/H$，$\hat{t}=tU_0/H$，$k=\pi H/\lambda$はx方向の攪乱の波長（λは砂州長）、$\ell=m\pi H/B$はy方向の波長（mは分割数）。

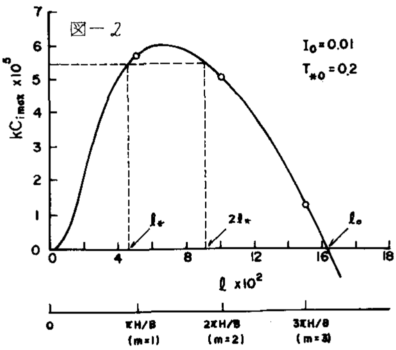
$$\begin{pmatrix}
ikF_r^2+\alpha_1I_0 & 0 & ik+(\alpha_2-1)I_0 & -(\alpha_2-1)I_0\\
0 & ikF_r^2+I_0 & -\ell & -\alpha_3\ell I_0\\
ik & \ell & ik & -ik\\
A_s\alpha_1\alpha_5(ik+\hat{\delta}k^2) & A_s\ell & A_s\alpha_2\alpha_5(ik+\hat{\delta}k^2) & -ikc-A_s\alpha_4\ell^2-A_s\alpha_2\alpha_5(ik+\hat{\delta}k^2)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}u_0\\ v_0\\ \xi_0\\ \eta_0\end{pmatrix}=0 \quad \cdots\cdots(14)$$

基本式(5~12)に代入整理すると式(14)を得る。 0以外の有意な解が存在するためには左辺の係数マトリックスのデターミナントが0でなければならない。 これで複素波速Cについて解くと、

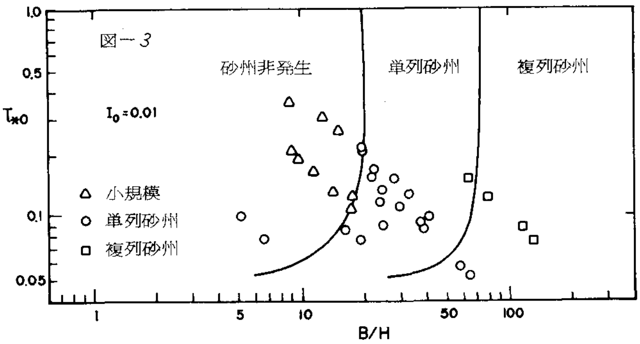
$$C = func(F_r^2, I_0, \tau_{*0} ; k, \ell)$$

となる。 基本流でも前出の抵抗則が成立するから、上の関係式中の3個の水理量の中の1つは独立でない。
以下の解析では I_0, τ_{*0} を変量にとっている。





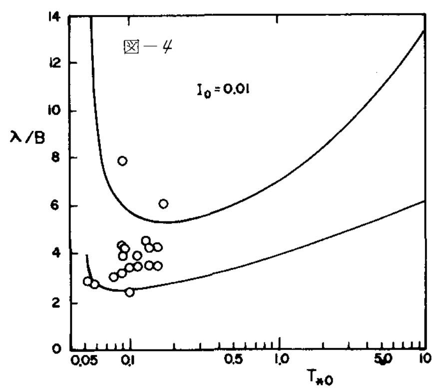
I_0, τ_{*0} に適当な値を与え増巾率 KC_i と波数 k の関係を求めると図-1のようになる。
KC_i が最大になる波数 k が与えられた条件下で卓越すると考え、$(KC_i)_{max}$ と波数 ℓ との関係を求めると図-2のようになる。



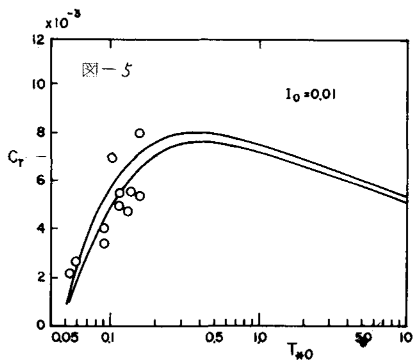
図の例のように $(KC_i)_{max}$ が1つのピークを持つ場合には、ℓ についての2つの特徴的な値 ℓ_0, ℓ_* が存在することを Engelund[2] は指摘している。

$$KC_{i\,max}(\ell_0) = 0 \quad , \quad KC_{i\,max}(\ell_*) = KC_{i\,max}(2\ell_*)$$

$\ell_0 = \pi H/B$ は砂州の発生限界、$\ell_* = \pi H/B$ は単列砂州と複列砂州の境界にそれぞれ対応する。 ℓ_0, ℓ_* は平均の水理量 I_0, τ_{*0} のみの関数であり、τ_{*0} を変化させて対応する ℓ_0, ℓ_* の値を求めれば I_0 ごとに図-3の2本の実線のような区分線が得られる。
得られた区分線は水路実験で得られた河床形状のちがいをかなりの程度、区分することが出来ている。



上の誘導では $(KC_i)_{max}$ に対応する波数 k が卓越すると仮定した。単列砂州発生領域の砂州長を理論よりもとめると図-4の2本の実線の範囲になる。 また複素波速の実部より砂州の移動速度を求めると図-5の2本の実線の範囲になる。 いずれも実験値との対応は良好であり擾乱の卓越性に関する上の仮定がほぼ妥当なものと認められた。



4. おわりに　河床安定理論から波長 k を含まない形で、砂州の発生限界および単・複列砂州の形成限界を求め中規模河床形態の領域区分を行なった。 また砂州長、移動速度についても実験値とよく一致する結果を得た。

参考文献　1) Einstein, Trans. ASCE. No.2140. 1942
2) Engelund & Skovgaard, J. Fluid Mech. vol.57. part 2. 1973