

九州大学工学部 正員 坂井 和朗

正員 神野 傳二

正員 上田 年比古

1 まえがき 河川や沿岸海域における汚染物質などの移流分散現象の解明は、水域の保全対策上重要な問題として、数多く研究されている。この場合、移流分散係数の予知が重要であるが、この理論値は、粘性底層の効果を含めて Chazwin¹⁾等により与えられている。さてこのような移流分散の数値計算に適用される差分法には、従来より種々提案されているが、移流項が卓越する剪断乱流中での拡散に対しては、移流項が顕著な離散化誤差が問題となる。本報では、粘性底層の効果を含め、2次元移流分散方程式を粒子移動法²⁾により数値計算し、モーメント法を用い移流分散係数を求め、粒子移動法について検討を行った。

2 数値計算の方法 粒子移動法は、2次元移流分散

方程式(1)を、速度 U の特性曲線上での濃度変化を示す(2)式に変形して、移流項を消去し、この式について数値計算を行なうと(2)式で移流項が顕著な離散化誤差を防ぐことができる。数値計算では、予め全領域にわたって配置されたある場合濃度をとつ流体粒子をその位置の流速 $U(y)$ で移動させる。次にこれらの粒子濃度より与えられる格子点濃度による(2)式の右辺の拡散項の計算を行ない、これによる濃度変化を各粒子に与えてゆく計算である。すなわち図1のように、 $\Delta x, \Delta y$ を固定格子差分間隔、 (x_i, y_i) を、 (i, j) 点の x, y 座標とする。今、 S_{ij} 領域に含まれる粒子 K の濃度 $C^n(k)$ (n : time step)の算術平均値を求め、これを各格子点の仮濃度 $\bar{C}_{i,j}^{n+1}$ とする。(3)式は、(2)式の差分式である。

次に、(3)式から得られる格子点の濃度増分 $\delta C_{i,j}^{n+1}$ を、均一にその区分領域 S_{ij} 内に含まれる全粒子の濃度増分 $\delta C^n(k)$ とすると、領域境界をはさむ粒子の濃度間に不連続が生じ、数値解の誤差の原因となるので、これをできるだけなくするため、隣りあう格子間の濃度増分の変化を、 $\delta C^n(x_i + \frac{1}{2}, y_i + \frac{1}{2})$ の2階のTaylor展開により曲面近似させ、個々の粒子の濃度増分 $\delta C^n(k)$ を算定した。

次に、粘性底層の存在が、移流分散に及ぼす効果を見極めるため、(4)式の粘性底層厚 δ_s に粒子を配置して計算した。まず底層内の拡散係数を考える。流れの場のマクロな乱流拡散係数の分布は、(6)式の流速の対数分布(log-law)および Reynolds analogy により、(7)式の放物型分布³⁾で与えられる。これによると壁面において、零となるが、壁面付近では、壁面に垂直な方向の変動速度は、壁面に規制される存在しなくなるが、壁面に平行な方向の変動速度は存在し⁴⁾、その乱流拡散係数 K_y は、Chazwin は、(8)式で与えられている。しこびって粘性底層内の粒子移動法の計算として、粘性底層内に配置された粒子を、(9)式(linear law)の流速で移動させ、壁面での仮の拡散係数として、(8)式を与え、さらに壁面境界条件 $\partial C / \partial y|_{y=0} = 0$ を考慮し、粒子の濃度変化を算定して、移流分散に及ぼす粘性底層の効果を求めた。

ここで行なった2次元移流分散の計算条件は、水深 $H = 20$ cm, 平均流速 $\bar{U} = 5.0$ cm/sec, 摩擦速度 $U_* = 0.333$ cm/sec, 格子差分間隔 $\Delta x = \Delta y = 2.0$ cm, 差分時間間隔 $\Delta t = 0.173$ sec, 初期濃度分布として、パルス型分布を与えた。

3 結果 図2(a)は、粘性底層効果を無視し、乱流拡散係数 K_x を無視した場合の、濃度の2次元的な経時

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \partial (K_y \frac{\partial C}{\partial y}) / \partial y \quad \dots (1)$$

$$\frac{dC}{dt} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \partial (K_y \frac{\partial C}{\partial y}) / \partial y \quad \dots (2)$$

$$\delta C_{i,j}^{n+1} = \Delta t \left[K_x (\bar{C}_{i+1,j}^n - 2\bar{C}_{i,j}^n + \bar{C}_{i-1,j}^n) / \Delta x^2 + K_y (\bar{C}_{i,j+1}^n - 2\bar{C}_{i,j}^n + \bar{C}_{i,j-1}^n) / \Delta y^2 + (K_y (y_{j+1}) - K_y (y_j)) (\bar{C}_{i,j+1}^n - \bar{C}_{i,j}^n) / \Delta y \right] \dots (3)$$

$$\delta_s = 5\nu / U_* \quad \dots (4)$$

$$U(y) / U_* = u_* y / \nu \quad \dots (5)$$

$$U(y) / U_* = \frac{1}{K} + \frac{1}{K} \ln y / y_* \quad \dots (6)$$

$$K_y = K(\eta - y) y / \eta^2 \quad \dots (7) \quad K_0 = 0.0006 \nu (1 + 0.1 (U_* y / \nu)) \dots (8)$$

$$\delta_x^2(x) = \left\{ \sum \bar{C}(x, z) \cdot (x - \bar{x})^2 \Delta x / \sum \bar{C}(x, z) \Delta x \right\} \dots (9)$$

$$D(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{d^2 \delta_x^2(x)}{dx^2} \right] \dots (10)$$

$$S = \left\{ \sum \bar{C}(x, z) \cdot (x - \bar{x})^3 \Delta x / \delta_x^3 \sum \bar{C}(x, z) \Delta x \right\} \dots (11)$$

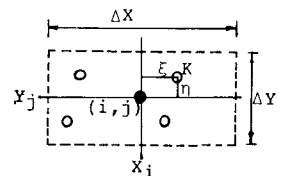
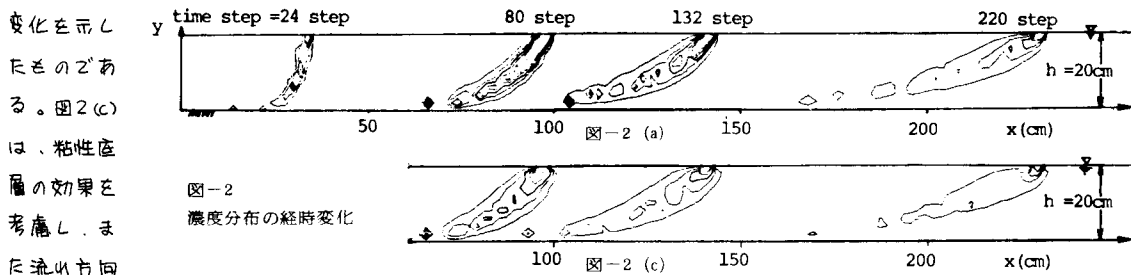


図1 S_{ij} 領域内の粒子(白丸)



の変動速度と鉛直方向の変動速度とを、流場の局所的な等方性により、等しいと仮定し、 $K_x = K_y$ とし、 K_x を与えた場合のものである。差分間隔の制約のため、両者とも十分滑らかな等濃度線になっていないが、時間の経過とともに、移流の効果が発生している様子が理解できる。また、開水路流れの移流分散における濃度分布は、充分大きい時間では、1次元の取り扱いができ、濃度分布は、Gauss分布になるといわれている。これを、(11)式の Skewness factor により評価したが、図3、2"ある。図より、Skewness factor は、時間とともに零に漸近しており、Sullivan⁵⁾のいう3rd Stage に分散過程が移行していることが、粒子移動法の数値計算でえられている。

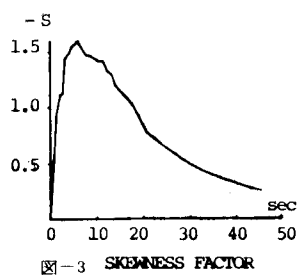


図-3 SKEWNESS FACTOR

次に、モーメント法により、移流分散係数を算定した。断面平均濃度 $\bar{C}(x,t)$ の分散 $\sigma_x^2(t)$ を(9)式により求めた。 $\sigma_x^2(t)$ の時間的変化を、図4に示す。移流分散係数は、(10)式により算定される。図中の勾配(a)は、図2(a)に対応し、 $D(a) = 48 \text{ cm}^2/\text{sec}$ となる。この値は、Chatwin⁴⁾が、粘性底層効果を考慮しない場合について理論的に求めた $D = 6.6 h U_*$ からえられる $D = 44 \text{ cm}^2/\text{sec}$ とほぼ一致していると考えられる。また勾配(b)は、 K_x を無視し、粘性底層効果を考慮したもので、モーメント法により、 $D(b) = 54 \text{ cm}^2/\text{sec}$ となる。粘性底層の存在を考慮した場合の移流分散係数 $D(b)$ が、 $D(a)$ の値より、12%程度大きくなっている。Chatwinによれば、粘性底層の存在を無視すると、移流分散係数 D の推定に10~20%程度の誤差が含まれることを理論的に示している。

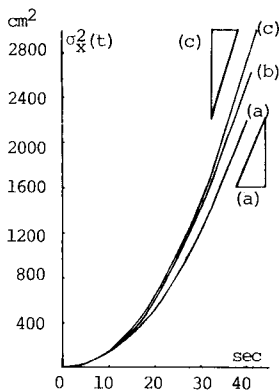


図-4 $\sigma_x^2(t)$ の時間変化

したがって、今回用いた粒子移動法により、粘性底層の存在による移流分散係数への付加的な寄与が、評価できると考えられる。x方向の乱流拡散係数 K_x を考慮すると、勾配(c)となり、 $D(c) = 62 \text{ cm}^2/\text{sec}$ がえられ、さらに大きな値をとる。このことは、図2(c)より、濃度のx方向への分散が大きくなり、これが $\sigma_x^2(t)$ に寄与しているためと考えられる。

4. むすび 粒子移動法を用いた、2次元断面乱流における移流分散方程式の数値計算を行ない、その適用上の問題点を考慮したが、流体粒子を粘性底層内に配置することによって、マクロな移流分散係数への付加的な粘性底層効果の寄与を見積もることができ、そのオーダーは、Chatwinのいう10~20%とほぼ一致した。

参考文献

- 1) R.C. Chatwin, Interpretation of longitudinal dispersion experiments, J. Fluid. Mech., (1971) pp 689~702
- 2) 神野、上田、粒子の移動による移流分散方程式の数値解法の検討、土木学会論文集オ271号(1978) pp 45~53
- 3) N. Yotsukura & M.B. Fering, Numerical Solution to a Dispersion Equation, ASCE, HY-5 (1964) pp 83~104
- 4) 粘性流体の力学、井井武文著、理工学社、P70
- 5) P.J. Sullivan, longitudinal dispersion within a two-dimensional turbulent shear flow, J. Fluid. Mech., (1970) pp. 551~576