II-238　分散係数を規定するパラメータの次元解析

大分工業高等専門学校　正会員　島田　晋

§1. まえがき　河川における環境保全の面から、流水中の水塊(受動的な輸送量)がどのように移流拡散されるかを明らかにすることは重要な問題である。現在までいろんな水域において実験・調査が実施され、移流拡散現象に関するデータが集積されており、これからは現象を支配している根本法則を明確にする段階に来ていると考えられる。そこでここでは乱流理論や海洋における拡散理論の成果に依りつつ[1]、現象を規定すると考えられるパラメータによって、どのように分散係数が河川の水理量や幾何学的特性量と関連づけられるかを示したものである。今回は羅列的な表現となったが、これらを統一的に説明できる根本原理へと導かれることを願っている。結果の一覧を本文では述べていない中間領域における関係も含めて、次頁上部に示している。この表において、σ^2は分散、Kは分散係数、Eはエネルギースペクトル、最下段はパラメータをエネルギ逸散率 ε と動粘性係数 ν で表わしたものである。また k は波数、α は拡散加速度を示す。

§2. 従来の研究成果[2]　移流拡散現象に関する最初の貴重な研究を発表したのはG.I.Taylorであり、彼は長いまっすぐな円管中の移流拡散機構が一次元分散方程式で表わされ、分散係数が速度分布と半径方向の拡散にどのように関連づけられるかを見出した。そして運動量輸送と濃度輸送に関するレイノルズの相似則から渦動拡散係数を求め、分散係数として有名な(1)を得た。ここに a は円管の半径、u_* はマサツ速度である。次にJ.W.ElderはTaylorの考えを無限幅二次元開水路乱流に拡張し、断面内流速分布に対数分布を仮定して(2)を与えている。ここに h は水深を示す。しかしながら多くの研究者は河川で実測された分散係数が(2)から計算されたものよりもはるかに大きな値をもち、Elderの推算式では充分ではないことを見出している。そしてH.B.Fischerは自然河川でこのように大きな分散係数が得られるのは、河川の流れが三次元的なため主流の横断方向の速度変動が水深方向の変動に比し、はるかに分散に寄与するためであると考え、これを実験によって確認した。また彼は移流拡散に関する時間尺度を導入し、Fischer's Analogyといわれる(3)を提案し、横断方向の混合係数として$0.23 R\cdot u_*$を使用して、時間尺度を表わす式として(4)を得ている。ここに $\hat{u}$ は断面内流速の断面平均流速に関する偏差を示し、$\langle\cdot\rangle$は断面平均、b は河川の半幅、そして R は径深である。その後多くの実験データをH.Liuはまとめ、分散係数を断面平均流速U、マサツ速度u_*、河川幅B、径深Rを用いて(5)のように表現した[3]。また綾・岩佐等は次元解析によって分散係数のデータを検討し、(6)のような比例関係を得ており、断面内の速度変動の自乗平均を断面平均流速で無次元化した J が(7)の比例関係にあることを見出し、移流拡散に関する時間尺度として(8)のような表現を得ている[4]。

$$K = 10.1\cdot a\cdot u_* \qquad (1)$$

$$K = 5.86\cdot h\cdot u_* \qquad (2)$$

$$K = \langle \hat{u}^2\rangle \cdot T_L \qquad (3)$$

$$T_L = 0.30\frac{b^2}{R\cdot u_*} \qquad (4)$$

$$\frac{K}{R\cdot u_*} = 0.18\left(\frac{U}{u_*}\right)^{1/2}\left(\frac{B}{R}\right)^2 \qquad (5)$$

$$\frac{K}{R\cdot u_*} \propto \left(\frac{U}{u_*}\right)^{-1/2}\left(\frac{B}{R}\right)^{3/2} \qquad (6)$$

$$J = \frac{\langle\hat{u}^2\rangle}{U^2} \propto \left(\frac{U}{u_*}\right)^{-3/2} \qquad (7)$$

$$\frac{T_L}{R/u_*} = 3.4\left(\frac{U}{u_*}\right)^{-1}\left(\frac{B}{R}\right)^{3/2} \qquad (8)$$

§3. 河川における水理量と移流拡散のスケール　等流状態にある河川の流れを考えるとき、単位時間に単位長さだけ河川水が流下する場合に消費されるエネルギーは(9)のように書かれる。ここに ρ は水の密度、A は流水断面積、τ_0 は底面のせん断応力、P は潤辺の長さを表わす。したがってエネルギー逸散率は(10)のようになる。(10)より河川における流水の力学的な現象を特徴づける水理量は、マサツ速度・断面平均流速・径深であると考えられる。そして流体の粘性の影響を表わす動粘性係数を加える必要がある。

$$\rho\cdot A\cdot \varepsilon = \tau_0\cdot P\cdot U \qquad (9)$$

$$\varepsilon = u_*^2\cdot U/R \qquad (10)$$

パラメータ	ω §4.	$\varepsilon\cdot\omega$ 7)	ε §5.	α	η §6.
単位	$[m/s]$	$[m^3/s^4]$	$[m^2/s^3]$	$[m/s^2]$	$[1/s^3]$
$\sigma^2(t)\propto$	$\omega^2\cdot t^2$ ①	$(\varepsilon\cdot\omega)^{2/3}\cdot t^{8/3}$	$\varepsilon\cdot t^3$ ⑤	$\alpha^2\cdot t^4$	$e^{\eta^{1/3}\cdot t}$ ⑧
$K(t)\propto$	$\omega^2\cdot t$ ②	$(\varepsilon\cdot\omega)^{2/3}\cdot t^{5/3}$	$\varepsilon\cdot t^2$ ⑥	$\alpha^2\cdot t^3$	
$K(\sigma)\propto$	$\omega\cdot\sigma$ ③	$(\varepsilon\cdot\omega)^{1/4}\cdot\sigma^{5/4}$	$\varepsilon^{1/3}\cdot\sigma^{4/3}$ ⑦	$\alpha^{1/2}\cdot\sigma^{3/2}$	$\eta^{1/3}\cdot\sigma^2$ ⑨
$E(k)\propto$	$\omega^2\cdot k^{-1}$	$(\varepsilon\cdot\omega)^{1/2}\cdot k^{-3/2}$	$\varepsilon^{2/3}\cdot k^{-5/3}$	$\alpha\cdot k^{-2}$	$\eta^{2/3}\cdot k^{-3}$
(ε,ν)	$(\varepsilon\cdot\nu)^{1/4}$ ④	$\varepsilon^{5/4}\cdot\nu^{1/4}$	$\varepsilon^1\cdot\nu^0$	$\varepsilon^{3/4}\cdot\nu^{-1/4}$	$(\varepsilon/\nu)^{3/2}$ ⑩

次に移流拡散に寄与するスケール（長さの尺度）については、河川の曲がり（蛇行）の影響を考えないことにすれば、水深に比し河幅の大きい河川についてはBをとればよいと考えられる。このことは河川における輸送現象では、時間の経過とともに現象に関与する乱れのスケールがBに近い大きさになると判断され、この最大スケールに対応してその河川における分散係数が定められるというように考えられる。

§4. 拡散速度パラメータ型 移流拡散時間があまり長くない範囲では、いろいろな大きさの乱れが現象に寄与し、①分散は経過時間の2乗に、②分散係数は経過時間に比例することが知られている。したがって③分散係数は長さの尺度に比例することになり、普遍的なパラメータとして**拡散速度ω**が選ばれることになる。そして慣性領域における乱れの構造に関係するパラメータがεとνであることから、④ωはεとνの積の4乗根に比例する量となる。よって分散係数を$R\cdot U_*$で無次元化したものは(11)のように示され、レイノルズ数の4乗根に逆比例し、U/U_*（マサツ損失係数の平方根に逆比例する量）の平方根に比例し、長さの尺度と径深の比に比例する。

$$\frac{K}{R\cdot U_*}\propto\left(\frac{R\cdot U}{\nu}\right)^{-1/4}\left(\frac{U}{U_*}\right)^{1/2}\frac{\sigma}{R}\quad(11)$$

§5. エネルギー逸散率パラメータ型 移流拡散がある程度進行すると、乱れの構造がコルモゴルフによる局所等方性とよばれる領域が卓越し、エネルギースペクトルが波数の−5/3乗則で表わされる。よって現象が粘性にほぼ無関係となり、⑤分散が経過時間の3乗に比例し、⑥分散係数が経過時間の2乗に比例する。これを長さの尺度との関係で表わせば⑦長さの尺度の4/3乗に分散係数は比例することになる。そして更に分散係数を$R\cdot U_*$で無次元表示すると(12)で表わされ、レイノルズ数には無関係な式となっている。指数の値が多少異なるが綾・岩佐が求めた関係と類似のものといえる。

$$\frac{K}{R\cdot U_*}\propto\left(\frac{U}{U_*}\right)^{1/3}\left(\frac{\sigma}{R}\right)^{4/3}\quad(12)$$

§6. エンストロフィー伝達率パラメータ型[5)6)] 前節で述べたものよりも更に大きな領域における現象に着目すると、気象学との関連で最近注目されている二次元乱流、つまり渦度の2乗の半分であるエンストロフィーのカスケードが考えられる領域である。ここでは普遍的なパラメータとして時間の−3乗の次元をもつ**エンストロフィー伝達率パラメータη**が用いられる。これを考慮すると、⑧分散と分散係数は経過時間について指数関数的に増大し、⑨分散係数は分散に比例することになる。ここでも普遍パラメータであるηがεとνで表現できると仮定すれば、⑩ηはε/νの3/2乗に比例する。このことから分散係数の無次元表示を求めると(13)のように見出され、U/U_*には無関係な表現となっている。これはH.Liuによって求められた(5)と類似の式形となっている。

$$\frac{K}{R\cdot U_*}\propto\left(\frac{R\cdot U}{\nu}\right)^{1/2}\left(\frac{\sigma}{R}\right)^{2}\quad(13)$$

参考文献 1)国司秀明(1976)海洋における物質の分散，「海洋物理学」，東京大学出版会，第2巻，9章。2)福岡捷二(1972)蛇行水路における分散の基礎的研究，土木学会論文報告集 No.200。3) H.Liu (1977) Predicting Dispersion Coefficient of Streams, Pr.ASCE, Vol.103, EE1。4)綾・岩佐他(1980)開水路流れにおける移流分散係数，第35回年講 II−197。5)巽・柳瀬(1979)二次元一様等方性乱流における相似則，第11回乱流シンポジウム。6)余越正一郎(1975)河川乱流のエンストロフィー伝達率，第30回年講 II−197。7)堀口・石塚・横田(1968)湾内における物質の拡散—東京湾の場合—，第15回海講 pp324～330。